.

“Гиперболичность сложных сетей”

Омский государственный университет

17 июля 2024 г.

Аннотация

- В работе изучается гиперболичность графов, гиперграфов и сложных сетей.

Цель:

- Изучить понятие гиперболичности для сложных сетей и его свойства, рассмотреть примеры гиперболических сетей.

Задачи:

- Изучить понятие гиперболичности для графов. Вычислить гирперболичность для некоторых классов графов.
- Изучить научные публикации о гиперболичности сложных сетей, в частности, нейронных сетей.
- Изучить подходы к определению понятия гипреболического гиперграфа.

Содержание

Актуальность исследования гиперболичности сложных сетей

- Иерархические структуры
- Работа мозга
    - Клетки положения(статья [11])
    - Пространство запахов(статья [10])
- Нейронные сети

Гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$

Гиперболическое пространство размерности n - это полное односвязное n-мерное риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны.

- $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$
- $cosh(d(x,y)) = 1 + \frac{2 \cdot \|x-y\|^2}{(1-\|x\|^2)\cdot(1-\|y\|^2)}$.

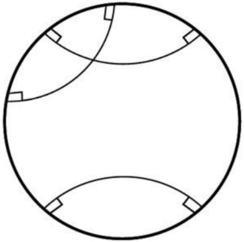


Рис. 1: Модель гиперболической плоскости в конформном шаре и три геодезические в ней

Основные определения

В следующих определениях X является метрическим пространством.

- *Геодезической* в X будем называть кривую $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$: $\forall\ t, s \in [a, b] \quad d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$
- X назовём геодезическим, если любые его две точки можно соединить геодезической.

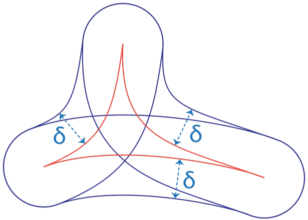
Замечание

Если не оговорено обратное, то X считаем геодезическим метрическим пространством.

- Пусть $x, y, z \in X$, геодезическую из точки x в точку y обозначим через xy и назовём *стороной* геодезического треугольника. *Геодезическим треугольником* xyz назовём $xy \cup yz \cup zx$.

Основные определения

- Геодезический треугольник xyz назовём δ - *тонким*, если любая его сторона лежит в объединении δ - окрестностей двух других.



Основные определения

1. X называется *δ-гиперболическим*, если $\forall\ x, y, z \in X$ геодезический треугольник xyz δ - тонкий.
2. *Произведением Громова* точек x, y $\in X$ относительно точки $x_0 \in X$ назовём $(x, y)_{x_0} := \frac{1}{2} \cdot (d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y))$. X называется *$\delta$-гиперболическим*, если $\forall\ x, y, z, x_0 \in X$ $(x, y)_{x_0} \geq min\{(x, z)_{x_0}, (z, y)_{x_0}\} - \delta$.
3. X называется *δ-гиперболическим*, если $\forall\ x, y, z, t \in X$ $d(x, y)+d(z, t) \leq max\{d(x, z)+d(y, t), d(x, t)+d(z, y)\}+\delta$.

Замечание

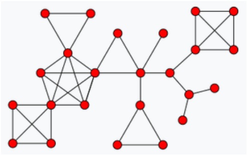
Данные определения эквивалентны(с возможно разными δ)

Гиперболичность графов

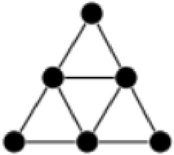
- Пусть дан связный(любые две вершины соединены путём) граф G=(V,E), расстоянием между двумя вершинами назовём минимальное число рёбер по всем путям из одной вершины в другую.
- Компонентой двусвязности графа называется максимальный связный подграф без точек сочленения(то есть без вершин, удаление которых приводит к нарушению связности графа).
- Блоковым графом называется граф, каждая компонента двусвязности которого является полным графом.
- Хордальный граф - связный граф, в котором любой цикл без хорд имеет максимум три ребра.

Гиперболичность графов

Пример блокового графа



Пример хордального графа



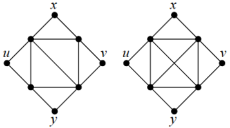
Гиперболичность графов

Утверждение ([7])

Класс 0-гиперболичных графов состоит только из блоковых графов.

Утверждение ([4])

В хордальном графе $\delta \leq 2$ (в смысле определения 3), причём $\delta = 2$ тогда и только тогда, когда граф содержит подграфы изометричные одному из следующих подграфов:



Ладейный граф

- Ладейный граф $n \times m$(либо $\mathbb{Z}^2$) - граф, вершинами которого являются целочисленные координаты на плоскости(либо все, либо в прямоугольнике $n \times m$), и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Утверждение

Ладейный граф 2-гиперболический(в смысле определения 3)

Доказательство.

Худший случай в неравенстве из определения 3 следующий: d(x,y) = d(x,t) = 2, d(x,z) = d(x,t) = d(y,z) = d(y,t) = 1. Этот случай возможен, например, при x=(0,2), y=(1,0), z=(0,0), t=(1,2). Тогда $4 \leq 2 + \delta$. □

δ-гиперболичность сетей

В [3] авторы экспериментальным путём нашли, как зависит кривизна гиперболического пространства от дельта-гиперболичности (в смысле определения 2) пространства визуальных данных:

$$c(X) = \left(\frac{0.144}{\delta_{rel}(X)}\right)^2$$

где $\delta_{rel}(X) = \frac{2 \cdot \delta(X)}{diam(X)}$. Алгоритм вычисления $\delta(X)$ описан в [9].

δ-гиперболичность сетей

Используя программу из [3] и библиотеку igragh, мы посчитали гиперболичность некоторых графов:

1. дерево на 1000 вершинах, от каждого корня которого отходят по 2 ветви.
2. целочисленная решётка 33 на 33.
3. "испорченное дерево"(взяли дерево на 1000 вершинах, некоторые вершины соединили ребром).

δ-гиперболичность сетей

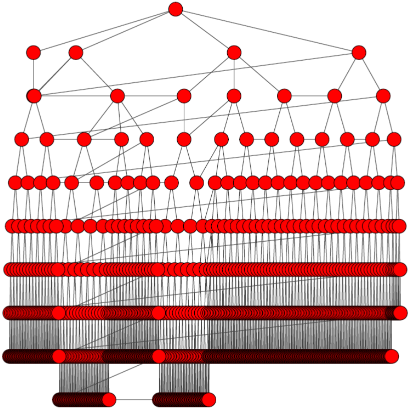


Рис. 2: "Испорченное дерево"

δ-гиперболичность сетей

Вывод по работе программы:

- На деревьях(которые являются абсолютно гиперболичными) и на решётках(которые абсолютно не гиперболичны) до тысячи вершин(больше тысячи не тестировалось) программа получает точное значение гиперболичности, то есть на всех деревьях выдаёт значние 0, а на всех решётках значение диаметра решётки.
- Третий граф является чем-то средним между деревом и не гиперболичным графом, и соответственно, выдаёт оценку между 0 и 1 (после деления оценки на диаметр пространства).

Гиперграфы

- Гиперграф - обобщение графа, в котором ребру могут быть инцидентны более двух вершин(то есть каждое ребро является не пустым подмножеством(не обязательно конечным) множества вершин).
- Реализацией гиперграфа H=(V,E_H) называется граф G=(V,E_G), такой что:
  1. любое ребро графа G содержится в некотором ребре гиперграфа H.
  2. для любого ребра e из E_H порождённый подграф G[e] является связным.

Гиперболичность гиперграфов

- Гиперграф назовём δ-гиперболическим, если δ'-гиперболична какая-то его реализация. $\delta = min\{\delta'\}$, где минимум берётся по всем гиперболическим реализациям гиперграфа.

Замечание

Заметим, что минимальная дельта достижима. Это, например, та реализация, в которой каждое ребро гиперграфа реализовано деревом(с сохранением условий реализации).

Матроиды

- Матроидом назовём пару (V,C), где V не пустое множество, а C подмножество не пустых элементов булеана V, удовлетворяющее следующим условиям:
  1. $\forall C_1 \in C,\ \forall C' \subset C_1\ C' \neq C_1 \ \Rightarrow\ C' \notin C$,
  2. $\forall C_1, C_2 \in C$ и $\forall x \in C_1 \cap C_2\ \exists C' \in C : C' \subset (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Замечание

Матроиды являются гиперграфами с дополнительными свойствами на рёбра.

Утверждение

Если в условии 2 матроида поменять C' на $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \in C$, то этот матроид будет 0-гиперболичным гиперграфом.

Литература

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. «Курс метрической геометрии». 2001.

[2] «Гиперболические группы по Михаилу Громову». Пер. с фр/Под ред. Э.Гиса и П. де ля Арпа, 1992.

[3] Valentin Khrulkov, Leyla Mirvakhabova Evgeniya Ustinova Ivan Oseledets, Victor Lempitsky «Hyperbolic Image Embeddings». 2020.

[4] Gunnar Brinkmann, Jack H. Koolen, and V. Moulton «On the Hyperbolicity of Chordal Graphs». 2000.

[5] Alessandro Muscoloni, Josephine Maria Thomas, Sara Ciucci, Ginestra Bianconi and Carlo Vittorio Cannistraci «Machine learning meets complex networks via coalescent embedding in the hyperbolic space». 2017.

Литература

[6] Yicong Li, Hongxu Chen, Xiangguo Sun, Zhenchao Sun, Lin Li, Lizhen Cui, Philip S. Yu, and Guandong X. «Hyperbolic Hypergraphs for Sequential Recommendation». 2021.

[7] H.-J. Bandelt and H. Mulder «Distance-hereditary graphs». 1986.

[8] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич «Лекции по теории графов». 1990.

[9] Herve Fournier, Anas Ismail, Antoine Vigneron «Computing the Gromov hyperbolicity of a discrete metric space». 2015.

[10] Yuansheng Zhou, Brian H.Smith, Tatyana O.Sharpee «Hyperbolic geometry of the olfactory space». 2018.

Литература

[11] Huanqiu Zhang, P.Dylan Rich, Albert K.Lee Tatyana O.Sharpee «Hippocampal spatial representations exhibit a hyperbolic geometry that expands with experience». 2022.

[12] Chad Giusti, Eva Pastalkova, Carina Curto, Vladimir Itskov «Clique topology reveals intrinsic geometric structure in neural correlations». 2015.

[13] Octavian-Eugen Ganea, Gary Bécigneul, Thomas Hofmann «Hyperbolic Neural Networks». 2018.