# Централизаторная размерность и нетеровость по уравнениям частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп

Бучинский И. М., buchvan@mail.ru

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики,
г. Омск, 16 июля 2024 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН,
проект FWNF-2022-0003

# Группа без кручения

Группа $G$ называется *группой без кручения*, если для каждого элемента $g \in G$ из равенства $g^\alpha = 1$ следует, что $\alpha = 0$.

# Централизатор

*Централизатором элемента* $g$ группы $G$ называется множество всех таких элементов из $G$, которые коммутируют с $g$:

$$C(g) = \{a \in G \mid [a, g] = 1\}.$$

*Централизатором множества* $A$ элементов группы $G$ называется множество всех таких элементов группы $G$, которые коммутируют сразу со всеми элементами из $A$:

$$C(A) = \bigcap_{a \in A} C(a).$$

# Централизатор

*Централизатором элемента* $g$ группы $G$ называется множество всех таких элементов из $G$, которые коммутируют с $g$:

$$C(g) = \{a \in G \mid [a, g] = 1\}.$$

*Централизатором множества* $A$ элементов группы $G$ называется множество всех таких элементов группы $G$, которые коммутируют сразу со всеми элементами из $A$:

$$C(A) = \bigcap_{a \in A} C(a).$$

# Централизаторная размерность

Myasnikov A., Shumyatsky P. «Discriminating groups and c-dimension» (2004).

Если существует такое целое число $d$, что группа $G$ имеет цепочку длины $d$ строго убывающих централизаторов и не имеет другой цепочки длины большей, чем $d$, то говорят, что $G$ имеет *централизаторную размерность* $cdim(G) = d$. Если такого целого числа $d$ не существует, то положим $cdim(G) = \infty$.

# Централизаторная размерность

Понятие централизаторной размерности группы совпадает с понятием высоты централизаторной решетки группы. Важность данного понятия обоснована, например, в работе A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov «Centraliser dimension and universal classes of groups» (2006) [2]. В ней же имеется широкий список ссылок на работы данного направления. Кроме того, в [2] показано, что группы, имеющие централизаторную решетку конечной высоты, универсально аксиоматизируемы.

# Групповой язык

*Групповой язык* $\mathcal{L}_{gr}$ – это язык, состоящий из двухместного функционального символа $\cdot$ для обозначения групповой операции умножения, одноместного функционального символа $^{-1}$ (обращение) и константного символа $e$ (единица группы): $\mathcal{L}_{gr} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$.

Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов группы $G$: $\mathcal{L}_{gr,G} = \mathcal{L} \cup G$, назовем групповым языком с константами из $G$.

# Групповой язык

*Групповой язык* $\mathcal{L}_{gr}$ – это язык, состоящий из двухместного функционального символа $\cdot$ для обозначения групповой операции умножения, одноместного функционального символа $^{-1}$ (обращение) и константного символа $e$ (единица группы): $\mathcal{L}_{gr} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$.

Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов группы $G$: $\mathcal{L}_{gr,G} = \mathcal{L} \cup G$, назовем групповым языком с константами из $G$.

# Двуступенно нильпотентные группы

Многообразие *двуступенно нильпотентных групп* $N_2$ определяется тождеством: $[x, y, z] = [[x, y], z] = 1$ для любых $x, y, z \in G$.

Из, например, статьи А. Мищенко, А. Трейер «Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп» (2007) нам известен общий вид уравнения от одной переменной с коэффициентами над двуступенно нильпотентной группой: $x^\alpha g[x, a] = 1$.

# Двуступенно нильпотентные группы

Многообразие *двуступенно нильпотентных групп* $N_2$ определяется тождеством: $[x, y, z] = [[x, y], z] = 1$ для любых $x, y, z \in G$.

Из, например, статьи А. Мищенко, А. Трейер «Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп» (2007) нам известен общий вид уравнения от одной переменной с коэффициентами над двуступенно нильпотентной группой: $x^\alpha g[x, a] = 1$.

# Универсальная алгебраическая геометрия

С достаточно обширным списком работ и теоретической базой по универсальной алгебраической геометрии можно ознакомиться, например, в монографии Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников «Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами» (2016, http://iitam.omsk.net.ru/~remesl/articles/monography.pdf) [1].

# Алгебраическая геометрия над группами

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ называется *решением уравнения* $s(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ от $n$ переменных $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ над группой $G$, если $G \models s(\mathbf{a})$.

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ называется *решением системы уравнений* $S(\mathbf{X})$ над группой $G$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{X})$.

# Алгебраическая геометрия над группами

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ называется *решением уравнения* $s(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ от $n$ переменных $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ над группой $G$, если $G \models s(\mathbf{a})$.

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ называется *решением системы уравнений* $S(\mathbf{X})$ над группой $G$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{X})$.

# Алгебраическая геометрия над группами

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{X})$ и $S_2(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ называются *эквивалентными* над группой $G$, если их множества решений совпадают.

Группа $G$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного $n$ любая система уравнений $S(\mathbf{X})$ от $n$ переменных $\mathbf{X}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{X}) \subseteq S(\mathbf{X})$.

# Алгебраическая геометрия над группами

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{X})$ и $S_2(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ называются *эквивалентными* над группой $G$, если их множества решений совпадают.

Группа $G$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного $n$ любая система уравнений $S(\mathbf{X})$ от $n$ переменных $\mathbf{X}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{X}) \subseteq S(\mathbf{X})$.

# Нетеровость по уравнениям для алгебраических систем

Описание общего теоретического подхода, позволяющего взглянуть на алгебраические множества с разных точек зрения, можно найти в параграфе «Объединяющие теоремы для нетеровых по уравнениям алгебраических систем» из [1], а также в работе Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V., «Unification theorems in algebraic geometry» (https://www.researchgate.net/publication/277682422_Unification_theorems_in_algebraic_geometry).

# Объединяющие теоремы из [1]

Теорема 2.5.21 (объединяющая теорема для $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка $\mathtt{L}$. Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка $\mathtt{L}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$;

(2) $\mathrm{Th}_\exists(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{A})$;

(3) $\Delta_\mathcal{C} \subseteq \Delta_\mathcal{A}$, *то есть любая диаграммная формула языка $\mathtt{L}$, выполнимая в $\mathcal{C}$, выполнима в $\mathcal{A}$;*

(4) *$\mathcal{C}$ вкладывается в некоторую ультрастепень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(5) *$\mathcal{C}$ изоморфна предельной алгебраической системе над $\mathcal{A}$;*

(6) *$\mathcal{C}$ является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$ языка $\mathtt{L}$;*

(7) *$\mathcal{C}$ дискриминируется алгебраической системой $\mathcal{A}$;*

(8) *$\mathcal{C}$ является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$, определённого системой уравнений языка $\mathtt{L}$.*

Теорема 2.5.22 (объединяющая теорема для $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка $\mathtt{L}$. Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка $\mathtt{L}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{C} \in \mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$;

(2) *$\mathcal{C}$ вкладывается в некоторую фильтрованную степень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(3) *$\mathcal{C}$ подпрямо вкладывается в* **конечное** *прямое произведение предельных алгебраических систем над $\mathcal{A}$;*

(4) *$\mathcal{C}$ изоморфна предельной алгебраической системе над некоторой конечной прямой степенью $\mathcal{A}^m$;*

(5) *$\mathcal{C}$ является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$ языка $\mathtt{L}$;*

(6) $\mathcal{C} \in \mathbf{Pvar}(\mathcal{A})$;

(7) *$\mathcal{C}$ вкладывается в некоторую прямую степень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(8) *$\mathcal{C}$ подпрямо вкладывается в прямое произведение некоторых подсистем алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(9) *$\mathcal{C}$ аппроксимируется алгебраической системой $\mathcal{A}$;*

(10) *$\mathcal{C}$ является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{A}$, определённого системой уравнений языка $\mathtt{L}$.*

# Нетеровость по уравнениям для алгебраических систем

Основными преимуществами нетеровых по уравнениям алгебраических систем являются:

1. возможность изучения только конечных систем уравнений;
2. справедливость объединяющих теорем 2.5.21, 2.5.22 (из [1]), дающих описание (неприводимых) координатных алгебр несколькими разными способами.

# Критерий нетеровости по уравнениям алгебраической системы

В статье «Несколько замечаний о нётеровости по уравнениям» (2013) представлена лемма, которая является критерием ненётеровости по уравнениям для алгебраических систем:

**Лемма 1 (Котов М.В.)**

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(\mathbf{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{a}_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(\mathbf{X}))_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, языка $\mathcal{L}$ такие, что $\mathcal{A} \not\models s_i(\mathbf{a}_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A} \models s_j(\mathbf{a}_i)$ для всех $j < i$.

# Критерий нетеровости по уравнениям алгебраической системы

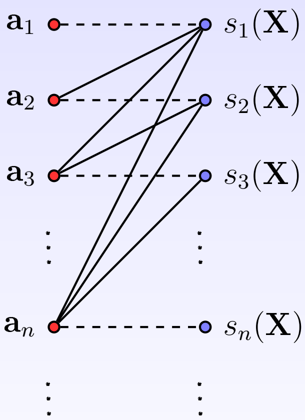


*Рис. 1. Иллюстрация к лемме 1.*

# О связи понятий нетеровости по уравнениям и цепочек централизаторов в группах

**Лемма 2**

Если в группе $G$ существует бесконечная цепочка строго убывающих централизаторов, то $G$ не является 1-нетеровой по уравнениям.

# Следствия из леммы 2

В Shahryari M., Shevlyakov A. «Direct products, varieties, and compactness conditions» (2017) было показано, что бесконечная прямая степень неабелевой группы не $q_\omega$-компактна (одно из обобщений нетеровости по уравнениям). Несложно понять, что из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1**

Бесконечная прямая степень неабелевой группы $G$ не является 1-нетеровой по уравнениям.

# Следствия из леммы 2

Кроме того, в работе Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V. «Two Theorems about Equationally Noetherian Groups» (1997) доказывается, что сплетение неабелевой группы и бесконечной группы не является нетеровой по уравнениям. Из леммы 2 и того факта, что бесконечная прямая степень неабелевой группы вкладывается в данное сплетение, непосредственно вытекает

**Следствие 2**

Сплетение неабелевой группы и бесконечной группы не является 1-нетеровой по уравнениям.

# 1-нетеровость по уравнениям двуступенно нильпотентных групп

Следующая теорема говорит нам о связи понятий нетеровости по уравнениям и цепочек централизаторов в двуступенно нильпотентных группах без кручения:

**Теорема 1 (Б.)**

Двуступенно нильпотентная группа $G$ без кручения не является 1-нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов.

# Примеры

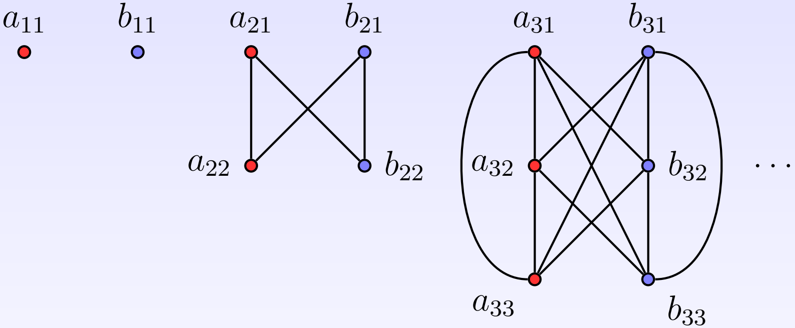


*Рис. 2. Пример 1-нетеровой по уравнениям графовой двуступенно нильпотентной группы со сколь угодно длинной (но не бесконечной) цепочкой централизаторов.*

# Примеры

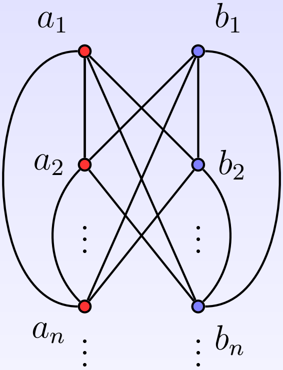


*Рис. 3. Пример ненетеровой по уравнениям от одной переменной графовой двуступенно нильпотентной группы (с бесконечной цепочкой централизаторов).*

# Централизаторная размерность частично коммутативных групп

**Теорема 2**

Пусть $G$ — конечно порожденная группа. Тогда централизаторная размерность группы $G$ равна высоте решетки канонических централизаторов, если выполнено одно из следующих условий:

1. $G$ — свободная частично коммутативная группа (Duncan A.J., Kazachkov I.V., Remeslennikov V.N., 2006);
2. $G$ — двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа (Blatherwick V., 2008).

# Централизаторная размерность частично коммутативных групп

Пусть $G$ — бесконечно порожденная свободная (или двуступенно нильпотентная) частично коммутативная группа, $d$ — конечное положительное целое число.

# Централизаторная размерность частично коммутативных групп

**Теорема 3 (Б.)**

Если в $G$ существует строго убывающая цепочка централизаторов конечной длины

$$C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_d), \text{где } A_i \text{ — конечные множества элементов группы } G,$$

то в $G$ имеется строго убывающая цепочка канонических централизаторов такой же длины

$$C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_d), \text{где } X_i \text{ — конечные подмножества порождающих группы } G.$$

# Централизаторная размерность частично коммутативных групп

**Теорема 3 (Б.)**

Кроме того, если в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов

$$C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_d) \supsetneq \ldots, \text{где } A_i \text{ — конечные множества элементов группы } G,$$

то в $G$ имеется строго убывающая цепочка канонических централизаторов такой же длины

$$C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_d) \supsetneq \ldots, \text{где } X_i \text{ — конечные подмножества порождающих группы } G.$$

# Аппроксимируемость

Говорят, что группа $G$ *аппроксимируется* группой $H$, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм $h : G \to H$, что $h(g) \neq 1$.

# Аппроксимируемость графовых двуступенно нильпотентных групп

Пусть $F_2$ – свободная двуступенно нильпотентная группа ранга 2.

Из работы «Структура координатных групп для алгебраических множеств в частично коммутативных нильпотентных группах» (2009):

**Лемма 3 (Мищенко А.А.)**

Каждая конечно порожденная частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа аппроксимируется $F_2$ над кольцом $\mathbb{Q}$.

# Аппроксимируемость графовых двуступенно нильпотентных групп

**Лемма 4**

Каждая (включая бесконечно порожденную) частично коммутативная $\mathbb{Z}$-группа ступени нильпотентности $c$ аппроксимируется свободной $\mathbb{Z}$-группой ранга $c$ той же ступени нильпотентности $c$.

# Нетеровость по уравнениям графовых двуступенно нильпотентных групп

**Лемма 5**

Всякая частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа является подгруппой $F_2^\omega$.

С другой стороны,

**Теорема 4 (Б.)**

Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная группа, являющаяся подгруппой в $F_2^\omega$. Тогда справедливо следующее: $G$ является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда она является нетеровой по уравнениям от одной переменной.

# Нетеровость по уравнениям графовых двуступенно нильпотентных групп

**Лемма 5**

Всякая частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа является подгруппой $F_2^\omega$.

С другой стороны,

**Теорема 4 (Б.)**

Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная группа, являющаяся подгруппой в $F_2^\omega$. Тогда справедливо следующее: $G$ является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда она является нетеровой по уравнениям от одной переменной.

# Бесконечный булев граф

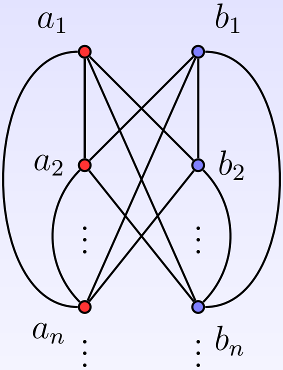


*Рис. 4. Граф коммутативности группы* $F_2^{\omega}$.

# Граф powerset

A. Treier «Universal graph powerset» (2020).

Пусть $\Gamma$ простой граф (необязательно конечный) с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\Gamma)$. Тогда *графом powerset* графа $\Gamma$ называется такой граф $P(\Gamma)$, что $V(P(\Gamma)) = P(V(\Gamma))$. Пусть $u$ и $v$ вершины графа $P(\Gamma)$ и $U$ и $V$ подмножества вершин графа $\Gamma$, относящиеся к $u$ и $v$ соответственно. Тогда $u$ и $v$ смежны в $P(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда каждая вершина $s \in U$ смежна со всеми вершинами из $V \setminus \{s\}$ и каждая вершина $t \in V$ смежна со всеми вершинами из $U \setminus \{t\}$.

# Нетеровость по уравнениям графов

Б., Трейер А.В. «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023).

Граф называется *совершенно ненетеровым*, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ такую, что каждая из вершин $a_i$ смежна со всеми вершинами $b_j$ при $j < i$, но не смежна с $b_i$.

**Теорема 5 (Б., Трейер А.В.)**

Справедливы следующие утверждения:

1. Простой граф ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненётеров, либо является надкликой.

2. Граф с петлями ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненётеров.

# Нетеровость по уравнениям графов

Б., Трейер А.В. «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023).

Граф называется *совершенно ненетеровым*, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ такую, что каждая из вершин $a_i$ смежна со всеми вершинами $b_j$ при $j < i$, но не смежна с $b_i$.

**Теорема 5 (Б., Трейер А.В.)**

Справедливы следующие утверждения:

1. Простой граф ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненётеров, либо является надкликой.
2. Граф с петлями ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненётеров.

# Пример совершенно ненетерова графа

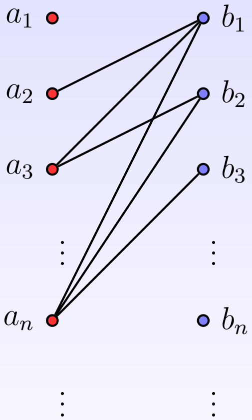


*Рис. 5. Базисный ненетеров граф.*

# Нетеровость по уравнениям предикатных структур

**Теорема 6 (Б., Котов М.В., Трейер А.В., 2024)**

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ над конечным предикатным языком $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ с константами из $A$ не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда для некоторого предикатного символа $P^{(n)}$ языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ существуют такая проекция $P'^{(k)}$ предиката $P^{(n)}$ и такое точное разбиение $I$ множества $\{1, \ldots, k\}$, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- $|I| > 1$ и алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, {}^{P'}/_{I} \rangle$ содержит совершенно ненетерову подсистему;
- $|I| = 1$ и алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, Q \rangle$, где $Q = {}^{P'}/_{\{\{1\}, \{2, \ldots, k\}\}}$ — бинарный предикат, содержит ненетерову клику.

# Пример ненетерова порядка

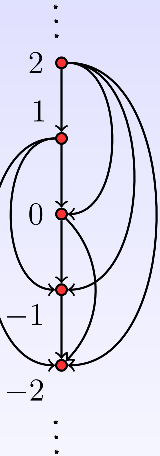


*Рис. 6. Частичный порядок* $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \prec \rangle$.

Последовательности $\{-2 \cdot i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{x \prec -2 \cdot i - 1\}_{i \in \mathbb{N}}$ образуют совершенно ненетерову подсистему в $\mathcal{Z}$.

# Нетеровость по уравнениям графов

Пусть $A$ — подмножество вершин в графе $\Gamma$. Тогда *ортогональное дополнение* $A$ определяется следующим образом:

$$A^{\perp} = \{u \in \Gamma \mid \forall a \in A \; d(u, a) \leq 1\}.$$

**Лемма 6**

Граф $\Gamma$ (как простой, так и с петлями) совершенно ненетеров тогда и только тогда, когда в нем существует бесконечная строго убывающая цепочка ортогональных дополнений, то есть найдется последовательность вершин $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, для которой справедлива следующая бесконечная цепочка вложений:

$$\Gamma = \emptyset^{\perp} \supsetneq \{b_1\}^{\perp} \supsetneq \{b_1, b_2\}^{\perp} \supsetneq \ldots \supsetneq \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}^{\perp} \supsetneq \ldots.$$

# Нетеровость по уравнениям графов

Пусть $A$ — подмножество вершин в графе $\Gamma$. Тогда *ортогональное дополнение* $A$ определяется следующим образом:

$$A^{\perp} = \{u \in \Gamma \mid \forall a \in A \ d(u,a) \le 1\}.$$

**Лемма 6**

Граф $\Gamma$ (как простой, так и с петлями) совершенно ненетеров тогда и только тогда, когда в нем существует бесконечная строго убывающая цепочка ортогональных дополнений, то есть найдется последовательность вершин $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, для которой справедлива следующая бесконечная цепочка вложений:

$$\Gamma = \emptyset^{\perp} \supsetneq \{b_1\}^{\perp} \supsetneq \{b_1, b_2\}^{\perp} \supsetneq \ldots \supsetneq \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}^{\perp} \supsetneq \ldots.$$

# Нетеровость по уравнениям графовых двуступенно нильпотентных групп

Таким образом, для частично коммутативной двуступенно нильпотентной группы $G_\Gamma$ с графом коммутативности $\Gamma$ имеем следующее:

$G_\Gamma$ ненетерова по уравнениям
$\iff$ $G_\Gamma$ ненетерова по уравнениям от одной переменной
$\iff$ в $G_\Gamma$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов
$\iff$ в $G_\Gamma$ существует бесконечная строго убывающая цепочка канонических централизаторов
$\iff$ в $\Gamma$ существует бесконечная строго убывающая цепочка ортогональных дополнений
$\iff$ $\Gamma$ совершенно ненетеров
$\iff$ $\Gamma$ в категории графов с петлями ненетеров по уравнениям

# Основной результат

**Теорема 7 (Б.)**

Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная группа без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной;
2. в группе $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов конечных множеств элементов из $G$.

Если $G$ к тому же является частично коммутативной группой, то каждое из этих условий по отдельности эквивалентно каждому из следующих условий:

# Основной результат

**Теорема 7 (Б.)**

Если $G$ к тому же является частично коммутативной группой, то каждое из этих условий по отдельности эквивалентно каждому из следующих условий:

3. $G$ не является нетеровой по уравнениям;
4. существует последовательность попарно различных $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ порождающих группы $G$ такая, что для любых $i$ $[a_i, b_i] \neq 1$ и для всех $j < i$ $[a_i, b_j] = 1$;
5. граф коммутативности с петлями группы $G$ не является нетеровым по уравнениям;
6. граф коммутативности группы $G$ является совершенно ненетеровым.

# Вопрос аксиоматизируемости

## Следствие 3

Класс частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп, не являющихся нетеровыми по уравнениям, не является универсально аксиоматизируемым.

## Вопрос

Аксиоматизируемо ли свойство нетеровости по уравнениям для графовых двуступенно нильпотентных групп в логике первого порядка?

# Вопрос аксиоматизируемости

## Следствие 3

Класс частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп, не являющихся нетеровыми по уравнениям, не является универсально аксиоматизируемым.

## Вопрос

Аксиоматизируемо ли свойство нетеровости по уравнениям для графовых двуступенно нильпотентных групп в логике первого порядка?

# Публикации результатов


- *Бучинский И. М., Трейер А. В.* О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям // Сиб. электрон. матем. изв. 2023. Т. 20, № 2. С. 580–587. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-56-66
- *Buchinskiy I. M., Kotov M. V., Treier A. V.* On equationally Noetherian predicate structures // Journal of Groups, Complexity, Cryptology. 2024. 13 p. Accepted.
- *Бучинский И. М.* Уравнения от одной переменной над двуступенно нильпотентными группами и цепочки централизаторов // Вестн. Ом. ун-та. 2024. Т. 2024, № 1. С. 33–41. DOI: 10.24147/1812-3996.2024.1.33-41

# Публикации результатов

- *Buchinskiy I. M., Treier A. V.* On first order definability of equationally noetherian graphs // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901, № 1. P. 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012032
- [DRAFT] *Бучинский И. М.* О связи уравнений над частично коммутативными двуступенно нильпотентными группами с уравнениями над графами.

# Спасибо за внимание!

Вопросы?