# Обобщение класса локально конечных групп конечной централизаторной размерности

Бутурлакин А.А.

Институт математики им. С.Л. Соболева

Омск, 2024

# Линейные группы

**Определение**

Группа называется линейной, если она имеет точное представление конечной размерности над некоторым полем, т.е. вкладывается в некоторую $GL_n(F)$.

**Определение**

Если $\mathcal{P}$ — некоторый класс групп, то группы $G$ называется локально $\mathcal{P}$-группой, если любое конечное подмножество элементов группы $G$ содержится в подгруппе из класса $\mathcal{P}$.

Например, если $\mathcal{P}$ — класс конечных групп, то определение дает локально конечные группы, в которых все конечно порожденные подгруппы конечны.

**Теорема (Вейсфейлер, 1984)**

Пусть $k$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p$ и $G$ — конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(k)$. Тогда $G$ содержит

1) нормальную подгруппу $T \geqslant \mathrm{O}_p(G)$;
2) нормальную подгруппу $L$, содержащую $T$;

такие, что

a) $T/\mathrm{O}_p(G)$ — коммутативная $p'$-группа;
b) $L/T$ — это прямое произведение конечных простых групп лиева типа над полем характеристики $p$;
c) индекс $LT$ в $G$ ограничен в терминах $n$.

# Группы с условием минимальности для централизаторов

**Определение**

Группа удовлетворяет условию минимальности для централизаторов, если любая убывающая цепь вложенных централизаторов стабилизируется на конечном шаге.

Если обозначить через $\mathcal{C}$ решетку централизаторов группы $G$, то взятие централизатора от подгруппы инвертирует порядок на этой решетке. Таким образом, условие максимальности и минимальности для централизаторов совпадают и в группе с условие минимальности для централизаторов все цепи строго вложенных централизаторов имеют конечную длину.

Поскольку линейная группа вложена в алгебру матриц, а в алгебре матриц централизатор — это подпространство, то такая группа всегда удовлетворяет условию минимальности.

**Теорема (Брайант, 1979)**

Локально конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для централизаторов, удовлетворяет теореме Силова.

Периодическая группа удовлетворяет теореме Силова для простого $p$, если в ней все максимальные $p$-подгруппы сопряжены.

**Теорема (Брайант – Хартли, 1979)**

Периодическая локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для централизаторов, разрешима.

**Лемма.**

Класс групп с условием минимальности для централизаторов замкнут относительно взятия подгрупп, конечных расширений и прямых произведений и не замкнут относительно произвольных расширений и гомоморфных образов.

Периодическая группа удовлетворяет сильной теореме Силова, если все ее подгруппы удовлетворяют теореме Силова.

**Теорема (Кегель, 1987)**

Пусть $G$ — локально конечная группа, удовлетворяющая сильной теореме Силова для простого $p \geqslant 5$. Пусть $S$ — максимальная нормальная локально $p$-разрешимая подгруппа группы $G$. Тогда

1) $Soc(G/S)$ — прямое произведение конечного числа простых групп;
2) $C_{G/S}(Soc(G/S)) = 1$.

Пусть $\mathcal{K}$ — это класс групп с тривиальным центром, в которых ценрализатор любого конечного подмножества нетривиален.

Таймановской топологией $\mathcal{T}_G$ на группе $G$ назовем топологию с базой окрестностей 1, состоящей из централизаторов конечных подмножеств.

**Теорема (А.Д. Тайманов, 1978)**

Если $G \in \mathcal{K}$, то $(G, \mathcal{T}_G)$ — топологическая группа.

# Группы конечной $c$-размерности

**Определение (Мясников, Шумяцкий, 2004)**

Назовем $c$-размерностью группы $G$ наибольшую длину цепи строго вложенных централизаторов. Обоозначение: $\mathrm{cdim}(G)$.

Линейные группы имеют конечную $c$-размерность.

Конечная $c$ -размерность является инвариантом универсальной эквивалентности.

Группа не может иметь $c$-размерность 1. Если она абелева, то ее $c$-размерность равна нулю. Если она неабелева, то существует элемент такой, что его централизатор отличен от центра группы и всей группы, что дает $c$-размерность не меньше двух.

Легко видеть, что в группе $c$-размерности 2, все собственные централизаторы абелевы, и наоборот, если все собственные централизаторы абелевы, то группа имеет $c$-размерность 2.

Конечные группы $c$-размерности 2 описал Р. Шмидт в 1970 году.

Если в группе $c$-размерности 2 тривиальный центр, то эта группа является CA-группой. В 1998 году У Юй-Фэнь описал все локально конечные CA-группы, обобщив классический результат Сузуки 1957 года.

### Теорема (У, 1998)

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $c$-размерности. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.

1) $G \simeq \mathrm{PSL}_2(L)$, где $L$ — локально конечное поле характеристики 2 и $|L| > 2$;
2) $G \simeq F \rtimes H$, где $F$ — абелева, а $H$ — локально циклическая группа автоморфизмов группы $F$, действующих без неподвижных точек. Причем все доплнения подгруппы $F$ сопряжены в $G$.

**Определение**

Радикал Хирша–Плоткина $F(G)$ группы $G$ — максимальная нормальная локально нильпотентная подгруппа.

**Определение**

Компонента группы — субнормальная квазипростая подгруппа. Слой $E(G)$ группы $G$ — подгруппа, порожденная ее компонентами.

**Определение**

Обобщеная подгруппа Фиттинга $F^*(G)$ — это $F(G)E(G)$.

В конечной группе $C_G(F^*(G)) \leqslant F^*(G)$.

Положим $F_1(G) = F(G)$ и $F_i(G)$ при $i > 2$ — это полный прообраз $F(G/F_{i-1}(G))$ в $G$.

**Теорема (Хухро, 2009)**

Пусть $G$ — периодическая локально разрешимая группа конечной $c$-размерности $k$. Тогда

1) $G$ разрешима и ступень разрешимости ограничена в терминах $k$;
2) ранг $G/F(G)$ ограничен в терминах $k$;
3) $G/F_2(G)$ содержит абелеву подгруппу клнечного индекса, ограниченного в терминах $k$.

### Гипотеза Боровика–Хухро

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $c$-размерности $k$. Обозначим через $S$ полный прообраз в $G$ группы $F^*(G/F(G))$. Тогда

1) число неабелевых композиционных факторов $G$ ограничено в терминах $k$;
2) $G/S$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, ограниченного в терминах $k$.

Оказалось, что первое утверждение гипотезы справедливо. Более точно, верно следующее утверждение.

### Теорема (Б., Васильев, 2013)

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $c$-размерности $k$. Тогда колечество неразрешимых факторов любого субнормального ряда в группе $G$ не превосходит $5k$.

**Теорема (Б., Васильев, Ревин, 2018)**

Второе утверждение гипотезы неверно.

**Теорема (Б., Васильев, Ревин, 2018)**

Пусть $G$ — конечная группа $c$-размерности $k$. Пусть $R$ — разрешимый радикал группы $G$. Тогда $G/S$ содержит абелеву подгруппу индекса, ограниченного в терминах $k$.

**Теорема (Бутурлакин, 2020 и Боровик – Кархумаки, 2020)**

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $c$-размерности $k$. Пусть $\overline{G}$ — это фактор-группа $G$ по разрешимому радикалу. Тогда $E(\overline{G})$ — это прямое произведение простых групп, каждая из которых является либо конечной, либо группой лиева типа, и фактор-группа $\overline{G}/E(\overline{G})$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, ограниченного в терминах $k$.

Класс групп конечной $c$-размерности также не замкнут относительно гомоморфизмов.

**Лемма (Бутурлакин, 2020)**

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $c$-размерности $k$. Тогда фактор группы $G$ по разрешимому радикалу имеет конечную $c$-размерность, ограниченную в терминах $k$.

## Определение

Множество $\mathcal{S}$ подгрупп группы $G$ называется композиционным рядом группы $G$, если выполнены следующие условия.

1) $1$ и $G \in \mathcal{S}$.
2) Множество $\mathcal{S}$ вполне упорядочено по включению.
3) Множество $\mathcal{S}$ замкнуто относительно произвольных объединений.
4) Для $D \in \mathcal{S}$ положим
$$D^- = \bigcup_{E \in \mathcal{S}, E < D} E.$$
Подгруппа $D^-$ нормальна в $D$ для любого $D \in \mathcal{S}$.
5) Либо $D^- = D$, либо $D/D^-$ — простая группа.

Нетривиальные факторы $D/D^-$ называются факторами ряда $S$.

**Лемма (У. Мейерфранкенфельд)**

Пусть некоторый композиционный ряд локально конечной группы $G$ имеет конечное число неабелевых факторов. Тогда $LSol(G)E(G) \neq 1$, где $LSol(G)$ — локально разрешимый радикал группы $G$. Кроме того, для неабелевых факторов выполнена теорема Жордана–Гельдера.

Из нашей теоремы 2013 года можно вывести, что любой композиционный ряд имеет ограниченное число неабелевых факторов.
Пусть $G$ — локально конечная группа, в которой любой субнормальный ряд имеет конечное число не локально разрешимых факторов.
Тогда в факторе $\overline{G} = G/LSol(G)$ слой $E(\overline{G})$ нетривиален.
Отсюда $C_{\overline{G}}(E(\overline{G})) = 1$. Следовательно, $\overline{G}/E(\overline{G})$ вкладывается в $Out(E(\overline{G}))$.

Известно, что любая бесконечная простая локально конечная группа либо является группой лиева типа, либо содержит в качестве секции произвольную конечную группу.

Таким образом, простые секции группы $G$ либо являются конечными, либо группами лиева типа над локально конечным полем. Кроме того, количество не локально разрешимых факторов в любом субнормальном ряде ограничено некоторой универсальной константой $k$.

Обозначим через $\lambda(G)$ сумму лиевых рангов тех композиционных факторов группы $G$, которые являются группами лиева типа, степеней знакопеременных факторов и количества остальных неабелевых факторов. Несложно показать, что $\lambda(G)$ ограничено в терминах $k$.

Отсюда несложно вывести, что фактор $\overline{G}/E(\overline{G})$ содержит абелеву подгруппу, чей индекс ограничен в терминах $k$.

### Теорема(Б., 2024)

Пусть $G$ — локально конечная группа, в которой любой субнормальный ряд имеет конечное число не локально разрешимых факторов. Пусть $\overline{G}$ — фактор-группа группы $G$ по локально разрешимому радикалу. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Существует число $k$ такое, что количество не локально разрешимых факторов в любом субнормальном ряде группы $G$ не превосходит $k$.
2) $E(\overline{G})$ —прямое произведение конечных неабелевых простых групп и локально конечных простых групп лиева типа.
3) $\lambda(E(\overline{G}))$ ограничено в терминах $k$.
4) $C_{\overline{G}}(E(\overline{G})) = 1$.
5) $\overline{G}/E(\overline{G})$ содержит абелеву подгруппу конечного индекса, чей индекс ограничен в терминах $k$.

Отметим, что класс локально конечных групп, в которых все субнормальные ряды имеют конечное число неразрешимых факторов, является полным, т.е. замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образом и расширений.

Однако он содержит все локально разрешимые группы.

**Лемма (Хухро, 2009)**

Если элементарная абелева $p$-группа $E$ порядка $p^n$ действует точно на конечной нильпотентной $p'$-группе $Q$, то $c$-размерность естественного полупрямого произведения больше либо равна $n - 1$.

Это свойство не переносится на фактор-группы.

$p$-локальная подгруппа группы $G$ — подгруппа вида $N_G(P)$, где $P$ — некоторая нетривиальная $p$-подгруппа группы $G$.
Известно, что любая $p$-локальная подгруппа фактор-группы является образом $p$-локальной подгруппы.

**Определение (Б., 2024)**

Назовем $q$-размерностью группы $G$ минимальное натуральное число $k$ такое, что для любой ее нетривиальной 2-подгруппы $P$ $r$-ранг группы $Aut_G(P)$ не превосходит $k$ для любого простого $r \neq 2$.

Напомним, что $Aut_G(P) = N_G(P)/C_G(P)$ и $q$-ранг — это наибольший ранг элементарной абелевой $q$-подгруппы данной группы.

**Лемма (Б., 2024)**

Класс локально конечных групп конечной $q$-размерности замкнут относительно гомоморфизмов.

**Теорема (Б., 2024)**

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $q$-размерности $k$. Тогда число неразрешимых факторов в любом субнормальном ряду группы $G$ ограничено в терминах $k$.

Следовательно, эти группы имеют описанную выше структуру.

**Теорема (Б., 2024)**

Пусть $G$ — локально конечная группа конечной $q$-размерности $k$. Тогда $G/O_{2',2}(G)$ содержит абелеву погруппу конечного индекса, ограниченного в терминах $k$.