“Центроиды коммутативно-транзитивных групп”

Выполнил: И.А. Чесноков, студент 4-го курса
Научный руководитель: А.В. Трейер, к.ф.-м.н.

Омский государственный университет

Омск 2024

Содержание

Понятие степени в группе

Каждая группа G имеет естественное определение целой степени ($g \in G,\ n \in \mathbb{Z}$):

$$g \mapsto g^n$$

Понятие степени в группе

Пусть A - ассоциативное кольцо с единицей. Группа G называется A-степенной группой (или A-группой), если определено действие $g \mapsto g^a \ \ (g \in G, a \in A)$, удовлетворяющее следующим аксиомам $\forall a, b \in A \ \forall g, h \in G$:

1. $g^1 = g, \ g^0 = 1, \ 1^a = 1;$
2. $g^{a+b} = g^a g^b, \ g^{ab} = (g^a)^b;$
3. $(h^{-1}gh)^a = h^{-1}g^a h;$
4. $[g, h] = 1 \to (gh)^a = g^a h^a.$

Если действие A на G является точным ($G^a \neq 1$), то A называется кольцом скаляров группы G.

Примеры степенных групп

- Произвольная группа является $\mathbb{Z}$-группой;
- Любая группа порядка n является $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-группой;
- R-модуль над произвольным кольцом R является абелевой R-группой;
- Произвольная делимая группа является $\mathbb{Q}$-группой.

Центроид группы

Отображение $\varphi : G \to G$ называется

- **нормальным**, если

$$\forall g, h \in G \ (h^{-1}gh)^{\varphi} = h^{-1}g^{\varphi}h.$$

- **квази-эндоморфизмом**, если

$$\forall g, h \in G \ [g, h] = 1 \Rightarrow (gh)^{\varphi} = g^{\varphi}h^{\varphi}.$$

Теорема (Лютиков, Мясников [1])
Множество $\Gamma(G)$ всех нормальных квази-эндоморфизмов группы G в себя является ассоциативным кольцом с единицей относительно операций сложения и умножения отображений определенных аналогично аксиоме (2). $\Gamma(G)$ называется **центроидом** группы G.

Максимальное кольцо скаляров

Теорема (Лютиков, Мясников [1])
Пусть G - группа. Тогда

1. $\Gamma(G)$ является кольцом скаляров группы G.
2. $\Gamma(G)$ является максимальным кольцом скаляров G, то есть любое B кольцо скаляров G вкладывается в $\Gamma(G)$.

Вложение центроида

Теорема (Лютиков, Мясников [1])
Пусть G - произвольная группа и C_i $(i \in I)$ - фиксированные представители классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов G. Тогда существует вложение

$$\lambda : \Gamma(G) \hookrightarrow \prod_{i \in I} \Gamma(C_i). \tag{1}$$

Группы с описанной структурой центройда

- CSA-группы, в частности, свободные неабелевы, гиперболические без кручения и монстры Тарского;
- Свободные нильпотентные группы, группы целочисленных унитриугольных матриц $UT_n(\mathbb{Z})$.

Коммутативно-транзитивные группы

Группа G называется CT-группой, если отношение коммутирования нетривиальных элементов транзитивно.

Лемма (Харрисон [5])
Пусть G - группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. G - CT-группа;
2. Все централизаторы нетривиальных элементов G абелевы;
3. Различные максимальные абелевы подгруппы в G пересекаются по единице;
4. Различные централизаторы нетривиальных элементов в G пересекаются по единице.

Примеры CT-групп

Примеры

- CSA-группы, в частности, свободные неабелевы группы, гиперболические группы без кручения и монстры Тарского. [2].
- Свободные разрешимые группы, в частности, свободные метабелевы группы [3].
- Группы с одним соотношением с кручением, [4].
- $PSL(2, K)$, где K - поле характеристики 2, [4].
- $PSL(2, \mathbb{R})$, [4].

Центройды СТ-групп

Следующая теорема позволяет получить описание структуры центроида для произвольной CT-группы, в частности, для свободных разрешимых.

Теорема[Трейер, Ч.] Пусть G - CT-группа. Тогда

$$\Gamma(G) = \prod_{i \in I} End(C_i),$$

где $\Gamma(G)$ - центроид группы, $End(C_i)$ - кольцо эндоморфизмов C_i, представителей классов сопряженности централизаторов нетривиальных элементов группы G.

Свободные метабелевы группы

Пусть F - свободная группа. Положим $F' = [F, F]$ - группа порожденная коммутаторами в группе F, $\forall k > 1 \;\; F^{(k)} = [F^{(k-1)}, F^{(k-1)}]$. Группа G называется свободной m-разрешимой группой, если $G \cong F/F^{(m)}$.

Пусть G - группа, $g \in G \setminus 1$. Элемент $g_0 \in G$ называется максимальным корнем элемента g, если $g = g_0^m, m \in \mathbb{N}$ причем m - наибольшее число, для которого уравнение $g = x^m$ имеет решение в G.

Центроид свободной метабелевой группы

Следствие. Пусть G - свободная m-разрешимая группа. Тогда

$$\Gamma(G) = \prod_{j \in J} \mathbb{Z}^{(j)} \times End(G^{(m-1)}),$$

где J - множество представителей классов сопряженности максимальных корней нетривиальных элементов $G \setminus G^{(m-1)}$.

Литература

[1] Lioutikov S., Myasnikov A. Centroids of groups.

[2] Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N. Exponential groups 2: Extensions of centralizers and tensor completion of CSA–groups

[3] Y. F. Wu, Groups in which Commutativity is a Transitive Relation// J. of Algebra - 1998 - 207 - p. 165-181.

[4] B. Fine, G. Rosenberger, Reflections on Commutative Transitivity, in Aspects of Infinite Groups// World Scientific Press - 2009 - p. 112-130.

[5] N. Harrison, Real Length Functions in Groups// Trans. Amer. Math. Soc. - 1972 - 174 - p. 77–106.