Биинтерпретируемость метабелевых неабелевых групп Баумслага–Солитера с кольцом целых чисел

Эвелина Юрьевна Даниярова,
Алексей Георгиевич Мясников

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Stevens Institute of Technology

Международная научная конференция
«Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики»,
посвящённая памяти В. А. Романькова

15–19 июля 2024
г. Омск

Вечная память
Виталию Анатольевичу

Литература

E. Daniyarova, A. Myasnikov
Groups elementarily equivalent to metabelian Baumslag – Solitar groups and regular bi-interpretability, 2024

O. Kharlampovich, A. Myasnikov, M. Sohrabi
Rich groups, weak second-order logic, and applications
Groups and Model Theory: GAFTA Book 2, 2021, 127–192

Теория интерпретаций

Теорема Гёделя об $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$, 1931

Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ неразрешима.

Теорема Тарского, Мостовского, Робинсона, 1953

Если $\mathbb{Z}$ интерпретируется в алгебраической системе $\mathbb{A}$ ($\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{A}$), то элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ неразрешима.

Теория интерпретаций может много больше.

Группы Баумслага – Солитера

- $BS(m,k) = \langle a, b \mid b^{-1}a^m b = a^k \rangle$ — группа Баумслага – Солитера с параметрами $m, k \in \mathbb{Z}$
- $BS(1,k) = \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^k \rangle$, $k > 1$, — метабелева неабелева группа Баумслага – Солитера
- $\forall\, x, y, z, t\ ([[x,y],[z,t]] = e)$ — тождество метабелевости
- $BS(1,k)$ — подгруппа группы аффинных преобразований вещественной прямой:

$$a\colon x \to x + 1,$$

$$b\colon x \to k^{-1}x,$$

$$b^{-1}ab\colon x \to x + k,$$

$$a^k\colon x \to x + k$$

Элементарная теория группы $\mathrm{BS}(1,k)$

Цель

Собрать теоретико-модельное «досье» на группу Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,k)$.

Элементарная теория группы $\mathrm{BS}(1,k)$

Цель

Собрать теоретико-модельное «досье» на группу Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,k)$.

Теорема Носкова, 1983

Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathrm{BS}(1,k))$ неразрешима.

Проблема типа Тарского = First-order classification problem

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебраическая система языка L.

Проблема типа Тарского для $\mathbb{A}$

Описать структуру алгебраических L-систем, элементарно эквивалентных $\mathbb{A}$, то есть структуру моделей элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$, $\widetilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$.

Проблема типа Тарского = First-order classification problem

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебраическая система языка L.

Проблема типа Тарского для $\mathbb{A}$

Описать структуру алгебраических L-систем, элементарно эквивалентных $\mathbb{A}$, то есть структуру моделей элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$, $\widetilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$.

Проблема типа Тарского для $\mathrm{BS}(1,k)$

Описать структуру групп, элементарно эквивалентных группе Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,k)$.

Проблема типа Тарского = First-order classification problem

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебраическая система языка L.

Проблема типа Тарского для $\mathbb{A}$

Описать структуру алгебраических L-систем, элементарно эквивалентных $\mathbb{A}$, то есть структуру моделей элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$, $\widetilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$.

Проблема типа Тарского для $\mathrm{BS}(1, k)$

Описать структуру групп, элементарно эквивалентных группе Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1, k)$.

Проблема типа Тарского для кольца $\mathbb{Z}$

Нестандартные модели кольца $\mathbb{Z}$ хорошо описаны, $\widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z}$.

Проблема типа Тарского для группы $\mathrm{BS}(1,k)$

Проблема типа Тарского для $\mathrm{BS}(1,k)$

Описать структуру групп, элементарно эквивалентных группе Баумслага – Солитера $\mathrm{BS}(1,k)$.

Теорема Носкова, 1983

Кольцо $\mathbb{Z}$ интерпретируется в группе $\mathrm{BS}(1,k)$ ($\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathrm{BS}(1,k)$), поэтому элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathrm{BS}(1,k))$ неразрешима.

Этого мало для решения проблемы типа Тарского.
Нужна по меньшей мере обратная интерпретация $\mathrm{BS}(1,k) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

Обратная интерпретация $\mathrm{BS}(1,k) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$, Khélif, 2007

Факт

Группа $\mathrm{BS}(1,k)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}[1/k] \rtimes \mathbb{Z}$, где

$$\mathbb{Z}[1/k] = \{zk^i \mid z, i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}.$$

Обратная интерпретация $BS(1,k) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$, Khélif, 2007

Факт

Группа $BS(1,k)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}[1/k] \rtimes \mathbb{Z}$, где
$$\mathbb{Z}[1/k] = \{zk^i \mid z, i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}.$$

Интерпретация $BS(1,k) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$:

- элементы (zk^i, m) группы $BS(1,k)$ задаются тройками целых чисел (z, i, m);
- групповая единица e, групповое умножение $\cdot$ и взятие обратного $^{-1}$ задаются формулами в $\mathbb{Z}$ на тройках:

$$\begin{aligned}
(z_1k^{i_1}, m_1)(z_2k^{i_2}, m_2) &= (z_1k^{i_1} + z_2k^{i_2-m_1}, m_1 + m_2),\\
(zk^i, m)^{-1} &= (-zk^{i+m}, -m),\\
e &= (0, 0).
\end{aligned}$$

Что даёт интерпретация $BS(1,k) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$?

- $BS(1,k) \simeq \mathbb{Z}[1/k] \rtimes \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}[1/k] = \{zk^i \mid z, i \in \mathbb{Z}\}$
- Элементы $\mathbb{Z}[1/k] \rtimes \mathbb{Z}$ задаются тройками целых чисел (z, i, m)

$$\begin{aligned}
(z_1k^{i_1}, m_1)(z_2k^{i_2}, m_2) &= (z_1k^{i_1} + z_2k^{i_2 - m_1}, m_1 + m_2), \\
(zk^i, m)^{-1} &= (-zk^{i+m}, -m), \\
e &= (0, 0)
\end{aligned}$$

- $\widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}[1/k^{\widetilde{\mathbb{Z}}}] = \{zk^i \mid z, i \in \widetilde{\mathbb{Z}}\}$
- $BS(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}}) := \widetilde{\mathbb{Z}}[1/k^{\widetilde{\mathbb{Z}}}] \rtimes \widetilde{\mathbb{Z}}$ — нестандартная модель $BS(1,k)$
- $BS(1,k,\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}[1/k] \rtimes \mathbb{Z} \simeq BS(1,k)$
- $BS(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}}) \equiv BS(1,k)$

Опять мало.

Регулярная биинтерпретация

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, rightsquigarrow, shift left] & \mathrm{BS}(1,k) \arrow[l, rightsquigarrow, shift left]
\end{tikzcd}$$

Регулярная биинтерпретация

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[loop left] \arrow[r, squiggly, shift left] & \mathrm{BS}(1,k) \arrow[l, squiggly, shift left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

O. Kharlampovich, A. Myasnikov, M. Sohrabi
Rich groups, weak second-order logic, and applications
Groups and Model Theory: GAFTA Book 2, 2021, 127–192

Регулярная биинтерпретация

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[loop left] \arrow[r, squiggly, shift left] & \mathrm{BS}(1,\mathrm{k}) \arrow[l, squiggly, shift left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Теорема о биинтерпретации, 2024

Кольцо $\mathbb{Z}$ и группа $\mathrm{BS}(1,\mathrm{k})$ регулярно сильно биинтерпретируемы.

Теоретико-модельное «досье» на $\mathrm{BS}(1, \mathrm{k})$

Теорема о биинтерпретации, 2024

Кольцо $\mathbb{Z}$ и группа $\mathrm{BS}(1, \mathrm{k})$ регулярно сильно биинтерпретируемы.

(I) Решение проблемы типа Тарского
(II) Примарность, атомарность, однородность
(III) Элиминация мнимостей
(IV) Квазиконечная аксиоматизируемость (QFA)
(V) Богатство
(VI) Свойства категорной теории интерпретаций типа $\mathbb{Z}$

(I) Решение проблемы типа Тарского

Теорема о структуре моделей теории $\mathrm{Th}(\mathrm{BS}(1,k))$, 2024

1. $$\mathrm{G} \equiv \mathrm{BS}(1,k) \iff \exists\, \widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z} \;\; \mathrm{G} \simeq \mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$$
2. если $\mathbb{Z}_1 \equiv \mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_2$, то
$$\mathrm{BS}(1,k,\mathbb{Z}_1) \simeq \mathrm{BS}(1,k,\mathbb{Z}_2) \iff \mathbb{Z}_1 \simeq \mathbb{Z}_2$$

(II) Примарность, атомарность, однородность

Теорема о примарности, атомарности, однородности

Группа $\mathrm{BS}(1,k)$ является примарной моделью своей элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathrm{BS}(1,k))$, кроме того, группа $\mathrm{BS}(1,k)$ атомарна и однородна.

Определения

1. Примарность — $\mathrm{BS}(1,k)$ элементарно вкладывается в $\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$, $\widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z}$.
2. Атомарность — любой полный тип, реализуемый в $\mathrm{BS}(1,k)$, изолирован в $\mathrm{Th}(\mathrm{BS}(1,k))$ («порождается» единственной формулой).
3. Однородность — если наборы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из $\mathrm{BS}(1,k)$ реализуют один и тот же полный тип, то $\bar{a}$ переводится в $\bar{b}$ некоторым автоморфизмом группы $\mathrm{BS}(1,k)$.

Нестандартные модели $\mathrm{BS}(1,k)$ как $\widetilde{\mathbb{Z}}$-группы

- $\mathrm{BS}(1,k)$ элементарно вкладывается в $\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$

Теорема о $\widetilde{\mathbb{Z}}$-группах Баумслага – Солитера, 2024

$\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$ — $\widetilde{\mathbb{Z}}$-степенная группа, $\widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}}) = \langle a, b \mid b^{-1}a^{z}b = a^{k^{z}},\ z \in \widetilde{\mathbb{Z}}\rangle_{\widetilde{\mathbb{Z}}}$$

Нестандартные модели $\mathrm{BS}(1,k)$ как $\widetilde{\mathbb{Z}}$-группы

- $\mathrm{BS}(1,k)$ элементарно вкладывается в $\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$

Теорема о $\widetilde{\mathbb{Z}}$-группах Баумслага – Солитера, 2024

$\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}})$ — $\widetilde{\mathbb{Z}}$-степенная группа, $\widetilde{\mathbb{Z}} \equiv \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{BS}(1,k,\widetilde{\mathbb{Z}}) = \langle a, b \mid b^{-1}a^z b = a^{k^z},\ z \in \widetilde{\mathbb{Z}}\rangle_{\widetilde{\mathbb{Z}}}$$

$$\mathrm{BS}(1,k) = \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^k\rangle$$

$$\mathrm{BS}(1,k) = \langle a, b \mid b^{-1}a^z b = a^{k^z},\ z \in \mathbb{Z}\rangle$$

(III) Элиминация мнимостей = Elimination of imaginaries

Теорема об элиминации мнимостей, 2024

Группа $\mathrm{BS}(1,k)$ допускает элиминацию мнимостей с параметрами.

Определение

Говорят, что алгебраическая система $\mathbb{A} = \langle A; L\rangle$ допускает элиминацию мнимостей с параметрами, если для любого n и любого определимого отношения эквивалентности $\sim$ на A^n существует m и определимая инъективная функция $F\colon A^n/{\sim} \to A^m$.

(IV) Квазиконечная аксиоматизируемость = Quasi-finitely axiomatibility (QFA)

Теорема о QFA

Группа $\mathrm{BS}(1,k)$ является QFA-группой, то есть существует такое предложение ψ группового языка, что для любой конечно порождённой группы G, как только $\mathrm{G} \models \psi$, так сразу $\mathrm{G} \simeq \mathrm{BS}(1,k)$.

(V) Богатство = Richness

Теорема о богатстве $BS(1,k)$

Группа $BS(1,k)$ является богатой алгебраической системой, то есть в ней логика первого порядка имеет ту же выразительную силу, что и слабая логика второго порядка.

Теоретико-модельное «досье» на $\mathrm{BS}(1,k)$

Теорема о биинтерпретации, 2024

Кольцо $\mathbb{Z}$ и группа $\mathrm{BS}(1,k)$ регулярно сильно биинтерпретируемы.

(I) Решение проблемы типа Тарского

(II) Примарность, атомарность, однородность

(III) Элиминация мнимостей

(IV) Квазиконечная аксиоматизируемость (QFA)

(V) Богатство

(VI) Свойства категорной теории интерпретаций типа $\mathbb{Z}$

Спасибо
за внимание!