О системах уравнений над наследственными системами

А.В. Ильев

Институт математики им. С.Л.Соболева, Омск

Цель доклада

Алгебраическая геометрия занимается вопросами исследования систем уравнений над разными алгебраическими системами — проверки систем уравнений на совместность и нахождения их общих решений.

В докладе будет показано, как понятие системы уравнений, алгебраического множества и координатной алгебры можно определить в случае конкретных классов алгебраических систем — обыкновенных графов и гиперграфов с рёбрами конечной мощности.

Определение алгебраической системы

Алгебраическая система языка $\mathrm{L} = \mathrm{R} \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{C}$ или L-*система* — это последовательность $\mathcal{A} = \langle A;\ R^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$, в которой A — непустое множество, называемое *основным множеством* или *носителем* системы $\mathcal{A}$, причём

(1) каждому предикатному символу $R \in \mathrm{R}$ соответствует n_R-местное отношение $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{n_R}$;

(2) каждому функциональному символу $F \in \mathrm{F}$ соответствует n_F-местная функция $F^{\mathcal{A}} : A^{n_F} \to A$;

(3) каждому константному символу $c \in \mathrm{C}$ соответствует некоторый элемент $c^{\mathcal{A}} \in A$.

В дальнейшем при описании L-систем будет использована краткая запись $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$.

Граф как алгебраическая система

Граф — это пара $\Gamma = (V, E_\Gamma)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E_Γ — множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E_\Gamma$, то вершины u и v называются *смежными*. Графы без петель и кратных рёбер называются *обыкновенными*.

Обыкновенный граф — это алгебраическая система $\Gamma = \langle V, \mathrm{L}_\Gamma \rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, язык $\mathrm{L}_\Gamma = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причем предикат смежности $E(x, y)$ *иррефлексивен и симметричен*, т. е., удовлетворяет условиям:

(G1) $\forall x \, \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

(G2) $\forall x \, \forall y \, [E(x, y) \to E(y, x)]$ (симметричность).

Случай, когда множество констант C взаимно однозначно соответствует множеству вершин графа, называется *диофантовым случаем*.

Отправная точка исследования

Даниярова Э. Ю., А.Г.Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016

В этой монографии для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка L рассмотрены вопросы совместности произвольной системы уравнений S над $\mathcal{A}$, и предложены методы вычисления радикала системы S и построения общего решения S, называемого *координатной алгеброй*.

При этом язык L тоже является произвольным, т. е. может состоять из любых предикатных символов, символов алгебраических операций и констант.

Термы языка L

Пусть X — некоторое множество переменных.

Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* языка L определяется рекурсивно:

(T1) все переменные $x \in X$ являются термами;

(T2) все константные символы языка L являются термами;

(T3) если $t_1, \ldots, t_n$ — термы и $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функциональный символ языка L, то $F(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм.

Так как все рассматриваемые нами языки не содержат функциональных символов, то их термами являются только переменные и константы.

Системы уравнений

Пусть $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — конечное множество переменных.

Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества X определяется следующим образом:

(A1) если $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$, то $t_1 = t_2$ — атомарная формула;

(A2) если $t_1, ..., t_n \in T_{\mathrm{L}}(X)$ и $R(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{R}$, то $R(t_1, ..., t_n)$ — атомарная формула.

Атомарные формулы множества $At_{\mathrm{L}}(X)$ называются *уравнениями* языка L с переменными из X. Всякое подмножество $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ называется *системой уравнений* языка L.

Уравнениями языка графов L_Γ являются формулы:
$x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, v_j)$ и $E(v_i, v_j)$.

Алгебраические множества

Точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ называется *решением уравнения* φ над алгебраической системой $\mathcal{A} = \langle A, \mathrm{L} \rangle$, если $\mathcal{A} \models \varphi(a)$.

Точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ называется *решением системы уравнений* $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$, если она является решением каждого уравнения из S.

Множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ всех решений системы S называется *алгебраическим множеством* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, определённым системой уравнений S.

Если $V_{\mathcal{A}}(S) = \emptyset$, то система уравнений S называется *несовместной* над алгебраической системой $\mathcal{A}$; иначе она называется *совместной*.

Радикал системы уравнений

Две системы уравнений S_1 и S_2 называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $V_{\mathcal{A}}(S_1) = V_{\mathcal{A}}(S_2)$.

Для любой системы уравнений S над $\mathcal{A}$ существует единственная эквивалентная ей максимальная система уравнений над $\mathcal{A}$, которая называется *радикалом* системы S и обозначается $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$.

Атомарные формулы из $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S)$ называются *следствиями* системы уравнений S над $\mathcal{A}$.

Если система S несовместна над $\mathcal{A}$, то $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(S) = At_{\mathrm{L}}(X)$.

Координатные алгебры

Отношение θ_S на множестве термов $T_{\mathrm{L}_\Gamma}(X)$, заданное по правилу

$$t_1 \sim_{\theta_S} t_2 \longleftrightarrow (t_1 = t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S),\ \ t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}_\Gamma}(X),$$

является отношением эквивалентности, а константные и предикатные символы языка L_Γ интерпретируются на фактор-множестве $T_{\mathrm{L}_\Gamma}(X)/\theta_S$ по правилам:

(1) $c/\theta_S = c$ для любого символа $c \in \mathrm{C}$;

(2) $E(t_1/\theta_S, t_2/\theta_S) =$ И $\longleftrightarrow E(t_1, t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

Построенный на фактор-множестве $T_{\mathrm{L}_\Gamma}(X)/\theta_S$ граф $CG_\Gamma(S)$ называется *координатным графом* алгебраического множества $V_\Gamma(S)$. Если система S несовместна над Γ, то $CG_\Gamma(S)$ является тривиальной системой $\mathcal{E}$, т. е. графом, состоящим из единственной вершины и петли.

Координатная алгебра в общем случае определяется аналогично.

Информационная база системы уравнений S

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — конечный обыкновенный граф и S — конечная система уравнений над Γ от переменных из множества X. *Информационная база* системы S состоит из набора конечных множеств и натуральных чисел, определяемых по группам:

1) $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — множество переменных, $S = \{s_1, ..., s_l\}$ — множество уравнений с переменными из X; k, l — числовые параметры.

2) $W_1, ..., W_k \subseteq V$, где W_i состоит из вершин графа Γ, которые содержатся в записи уравнений вида $E(x_i, v)$ из системы S;

$$\alpha_i = |W_i| \text{ — числовые параметры, где } i = 1, ..., k.$$

Информационная база системы уравнений S

3) $W_1^{\perp}, \ldots, W_k^{\perp} \subseteq V$. Множество $W_i^{\perp}$ состоит из вершин графа Γ, которые смежны с каждой из вершин множества W_i, и содержит все возможные значения переменной x_i (если $W_i = \emptyset$, то по определению полагаем $W_i^{\perp} = V$);

$$\beta_i = |W_i^{\perp}| \text{ — числовые параметры, где } i = 1, \ldots, k.$$

4) $W_1^{\perp\perp}, \ldots, W_k^{\perp\perp} \subseteq V$, где $W_i^{\perp} = (W_i^{\perp})^{\perp}$.

$$\gamma_i = |W_i^{\perp\perp}| \text{ — числовые параметры, где } i = 1, \ldots, k.$$

Если в информационной базе хотя бы одно из чисел $\beta_i = 0$ при $\alpha_i \neq 0$, то информационная база является *несогласованной*, а система $S(X)$ несовместна над Γ. Иначе переходим к определению классов эквивалентности на $T_{\mathrm{L}_\Gamma}(X)$.

Процедура проверки системы уравнений S на совместность

Данная процедура строит классы эквивалентности $Y(t_m)$, где t_m — переменная x_i либо константа v_j, и преобразует систему уравнений S над графом Γ в эквивалентную систему $\overline{S}$, не содержащую уравнений вида $t_i = t_j$.

В начале работы процедуры каждое множество $Y(t_m)$ состоит только из одного терма t_m, а система $\overline{S}$ совпадает с S.

В процессе работы процедуры происходит переопределение множеств $W_1^{\perp}, ..., W_k^{\perp}$, из которых удаляются лишние вершины.

Процедура проверки системы уравнений S на совместность

Система уравнений S над графом Γ является несовместной в следующих случаях:

1) Две разные константы v_i и v_j попали в один класс эквивалентности.

2) Некоторым переменным не могут быть присвоены никакие значения на графе Γ. Так будет, в частности, если:

— одно из переопределённых множеств $W_i^{\perp}$ стало пустым;

— после преобразований система $\overline{S}$ содержит уравнение вида $E(t_i, t_i)$;

— после преобразований система $\overline{S}$ содержит уравнение $E(v_i, v_j)$, при этом ребра (v_i, v_j) нет в графе Γ.

Построение радикала

Если система S несовместна над Γ, то $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = At_{\mathrm{L}_\Gamma}(X)$.

В противном случае при построении радикала используются последние версии множеств $W_1^\perp, ..., W_k^\perp$, полученные при выполнении процедуры проверки совместности системы S. С их помощью заново определяются множества $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$.

Далее $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ строится с помощью следующей процедуры.

1) К $\overline{S}$ добавляются все уравнения вида $E(x_i, v_j)$, где $v_j \in W_i^{\perp\perp}$.

2) К полученному множеству атомарных формул добавляются все равенства, обусловленные классами эквивалентности $Y(t_m)$: если термы $t_i, t_j \in Y(t_m)$, то $t_i = t_j \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

3) Полученное множество атомарных формул дополняется всеми следствиями из него.

Построение координатного графа

Множество вершин координатного графа $\Delta = CG_\Gamma(S)$ совпадает с множеством меток t_m классов эквивалентности $Y(t_m)$ и является подмножеством $V \cup X$, а множество ребер выглядит следующим образом:

$$E(\Delta) = E \cup \{(x_i, x_j)\} \cup \{(x_i, v_l)\},$$

где $E(x_i, x_j), E(x_i, v_l) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

Если система S несовместна над Γ, то $\Delta = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — граф, состоящий из одной вершины и петли. В противном случае построение координатного графа осуществляется по следующей процедуре.

Процедура построения координатного графа

1) К множеству вершин графа Γ добавляются вершины x_i из множества X.

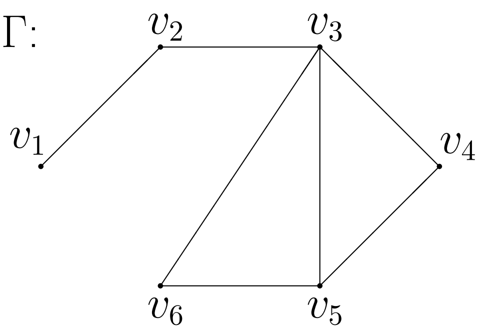
2) К полученному графу добавляются всевозможные рёбра (x_i, x_j) и (x_i, v_l), для которых $E(x_i, x_j), E(x_i, v_l) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

3) В полученном графе для каждого класса эквивалентности $Y(t_m)$ все вершины, находящиеся в этом классе, стягиваются в одну вершину, а кратные рёбра заменяются одним ребром.

В результате получается координатный граф Δ.

Пример

Γ:



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.
$S = \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, x_3), E(x_2, v_4), E(x_4, v_6), x_3 = v_5\}$.

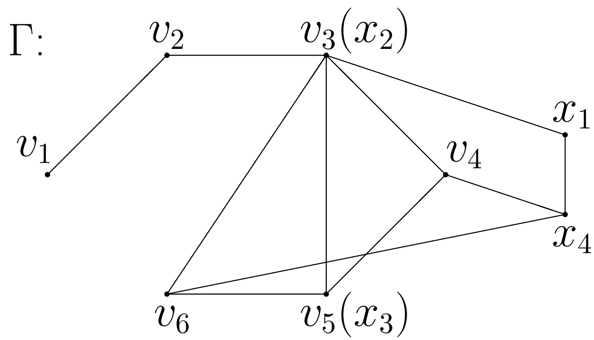
Решение

Система уравнений S совместна над Γ. Её радикал выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = \{E(x_1,x_2),\ E(x_1,x_4),\ E(x_2,x_1),\ E(x_2,x_3),\ E(x_3,x_2),\ E(x_4,x_1),\ E(x_1,v_3),\ E(x_2,v_2),\ E(x_2,v_4),\ E(x_2,v_5),\ E(x_2,v_6),\ E(x_3,v_3),\ E(x_3,v_4),\ E(x_3,v_6),\ E(x_4,v_4),\ E(x_4,v_6),\ E(v_2,x_2),\ E(v_3,x_1),\ E(v_3,x_3),\ E(v_4,x_2),\ E(v_4,x_3),\ E(v_4,x_4),\ E(v_5,x_2),\ E(v_6,x_2),\ E(v_6,x_3),\ E(v_6,x_4),\ E(v_2,v_3),\ E(v_3,v_2),\ E(v_3,v_4),\ E(v_3,v_5),\ E(v_3,v_6),\ E(v_4,v_3),\ E(v_4,v_5),\ E(v_5,v_3),\ E(v_5,v_4),\ E(v_5,v_6),\ E(v_6,v_3),\ E(v_6,v_5),\ x_2=v_3,\ x_3=v_5,\ v_3=x_2,\ v_5=x_3,\ x_1=x_1,\ x_2=x_2,\ x_3=x_3,\ x_4=x_4,\ v_1=v_1,\ v_2=v_2,\ v_3=v_3,\ v_4=v_4,\ v_5=v_5,\ v_6=v_6\}.$$

Решение

Координатный граф $CG_\Gamma(S)$ выглядит так:



То есть $x_1 \in \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, $x_2 = v_3$, $x_3 = v_5$, $x_4 \in \{v_3, v_5\}$, причём значениями переменных x_1 и x_4 могут быть только смежные вершины в графе Γ.

$$V_\Gamma(S) = \big\{(v_2, v_3, v_5, v_3),\ (v_4, v_3, v_5, v_3),\ (v_4, v_3, v_5, v_5),\ (v_5, v_3, v_5, v_3),\\ (v_6, v_3, v_5, v_3),\ (v_6, v_3, v_5, v_5)\big\}.$$

Алгебраические множества над графами

Если система уравнений S совместна над графом Γ, то определённое ей алгебраическое множество может быть задано в виде:

$$V'_\Gamma(S) = \{(v_1, ..., v_k) \in V^k \mid v_i \in W_i^\perp;\ x_i, x_j \in Y(t_m) \Rightarrow v_i = v_j;$$
$$E(x_i, x_j) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E_\Gamma\}.$$

Возникает естественный вопрос: существуют ли ещё какие-то классы алгебраических систем, кроме обыкновенных графов и графов с петлями, алгебраические множества систем уравнений над которыми принимают аналогичный вид?

Гиперграфы

Гиперграф — это пара $\mathrm{H} = (V, E_{\mathrm{H}})$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E_{H} — некоторое семейство непустых неупорядоченных подмножеств множества V, называемых *рёбрами* или *гиперрёбрами*.

Гиперграф с рёбрами конечной мощности — это алгебраическая система $\mathrm{H} = \langle V, \mathrm{L}_{\mathrm{H}} \rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L}_{\mathrm{H}} = \langle E_1, E_2, \dots, = \rangle$ состоит из счетного множества предикатов, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства; предикат $E_n(x_1, \dots, x_n)$ означает, что элементы $x_1, \dots, x_n$ лежат в ребре гиперграфа мощности n, т. е. предикат $E_n(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов*:

(H1) $\forall x_1 \dots \forall x_n \, [E_n(x_1, \dots, x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} E_n(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))]$,

где π — любая перестановка $x_1, \dots, x_n$, $\; n \in \mathbb{N}$;

(H2) $\forall x_1 \dots \forall x_n \, [E_n(x_1, \dots, x_n) \to \bigwedge\limits_{s \neq t} (x_s \neq x_t)]$, $\; n \in \mathbb{N}$.

Наследственные системы

Наследственная система — это пара $\mathcal{A} = (A, \mathcal{I})$, где A — непустое множество элементов, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств, называемых *независимыми*, обладающее свойством:

(I1) $I \in \mathcal{I},\ J \subseteq I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$.

Если циклами в $\mathcal{A}$, т. е. минимальными по включению зависимыми множествами являются только 2-элементные подмножества A, то наследственная система $\mathcal{A}$ называется *наследственной системой обыкновенного графа*.

Заметим, что любая конечная наследственная система является гиперграфом с рёбрами конечной мощности, обладающим свойством:

(H3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \left[E_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_i E_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right],\ \ n \geqslant 2.$

Постановка задачи над гиперграфами

Уравнениями языка гиперграфов L_{H} являются формулы:
$x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, $E_1(x_i)$, $E_1(v_i)$, $E_2(x_i, x_j)$, $E_2(x_i, v_j)$, $E_2(v_i, v_j)$, $E_3(x_i, x_j, x_l)$, $E_3(x_i, x_j, v_l)$, $E_3(x_i, v_j, v_l)$, $E_3(v_i, v_j, v_l)$ и т. д.

Требуется определить такой класс гиперграфов, для которых при решении совместной системы уравнений S над гиперграфом H с помощью алгоритма, строящего множества значений переменных $V(x_i)$ и классы эквивалентности $Y(t_m)$, алгебраическое множество могло бы быть задано в виде:

$$V'_{\mathrm{H}}(S) = \{(v_1, ..., v_k) \in V^k \mid v_i \in V(x_i);\ x_i, x_j \in Y(t_m) \Rightarrow v_i = v_j;$$

$$E_l(x_{i1}, ..., x_{il}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S) \Rightarrow \{v_{i1}, ..., v_{il}\} \in E_{\mathrm{H}}\}.$$

Ключевая теорема

Теорема 1. Для любой совместной системы уравнений S над гиперграфом H равенство множеств $V'_{\mathrm{H}}(S) = V_{\mathrm{H}}(S)$ выполнено тогда и только тогда, когда:

1) для всякого уравнения $E_{l+m}(t_{i1}, ..., t_{il}, v_{i1}, ..., v_{im}) \in S$ уравнение $E_l(t_{i1}, ..., t_{il}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S)$;

2) для всяких множеств термов $\{t_{i1}, ..., t_{il}\}$ и констант $\{v_{i1}, ..., v_{im}\}$ если уравнения $E_l(t_{i1}, ..., t_{il})$, $E_m(v_{i1}, ..., v_{im}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S)$ и при этом $E_{m+1}(t_{ij}, v_{i1}, ..., v_{im}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S)$ для всех $t_{ij} \in \{t_{i1}, ..., t_{il}\}$, то и уравнение $E_{l+m}(t_{i1}, ..., t_{il}, v_{i1}, ..., v_{im}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S)$.

Идея доказательства

Необходимость условия 1) следует из требования неповторения элементов в предикатах смежности вершин гиперграфа. В частности, разные переменные в уравнении $E_{l+m}(x_{i1}, ..., x_{il}, v_{i1}, ..., v_{im})$ не должны принимать одинаковые значения в частных решениях, а в $V'_{\mathrm{H}}(S)$ данное требование может быть учтено только при помощи отдельного уравнения $E_l(x_{i1}, ..., x_{il}) \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S)$.

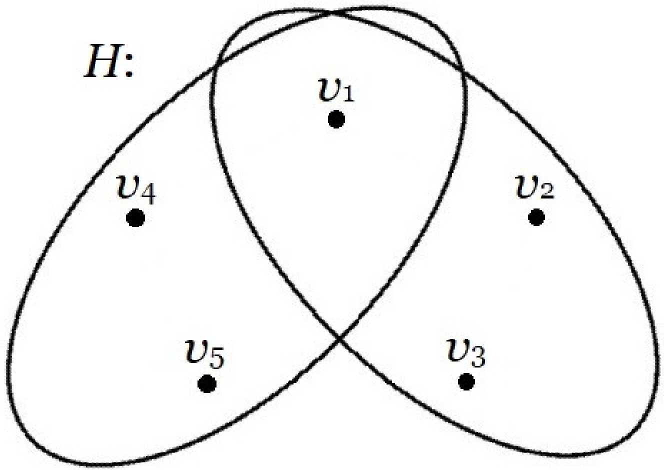
Необходимость условия 2) следует из того, что для любого уравнения $E_{l+m}(t_{i1}, ..., t_{il}, v_{i1}, ..., v_{im}) \in S$ при $l \geqslant 2$ и с учётом выполнения условия 1)

$$V'_{\mathrm{H}}(S) = V'_{\mathrm{H}}(S \setminus \{E_{l+m}(t_{i1}, ..., t_{il}, v_{i1}, ..., v_{im})\}).$$

А значит $\mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S) = \mathrm{Rad}_{\mathrm{H}}(S \setminus \{E_{l+m}(t_{i1}, ..., t_{il}, v_{i1}, ..., v_{im})\})$.

Достаточность очевидна.

Пример с нарушением условия 1)



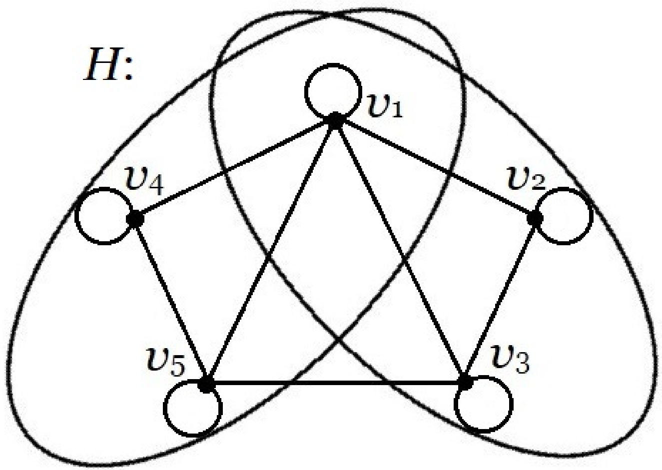
$$V_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},\ E_H = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_4, v_5\}\}.$$

$$S = \{E_3(x_1, x_2, v_1)\}.$$

$$V_{\mathrm{H}}(S) = \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_2\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_4\}\}.$$

$$V'_{\mathrm{H}}(S) = \{\{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_2\}, \{v_4, v_3\}, \{v_4, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_2\}, \{v_5, v_3\}, \{v_5, v_4\}, \{v_5, v_5\}\}.$$

Пример с нарушением условия 2)



$V_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E_H = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\},$
$\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\}.$

$$S = \{E_3(x_1, x_2, v_1)\}.$$

$V_{\mathrm{H}}(S) = \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_2\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_4\}\}.$

$V'_{\mathrm{H}}(S) = \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_3\}, \{v_5, v_4\}\}.$

Гиперграф → наследственная система

Таким образом, в данном случае речь идёт о наследственных системах, обладающих свойством

(I2) для любых $I, J \in \mathcal{I}$ если $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ для всех $j \in J$, то $I \cup J \in \mathcal{I}$.

Теорема 2. Конечная наследственная система $\mathcal{A}$ обладает свойством (I2) только и только тогда, когда она обладает свойством (I2′):

(I2′) для любых $I \in \mathcal{I}$ и $\{j_1, j_2\} \in \mathcal{I}$ если $I \cup \{j_1\} \in \mathcal{I}$ и $I \cup \{j_2\} \in \mathcal{I}$, то $I \cup \{j_1, j_2\} \in \mathcal{I}$.

Теорема 3. Если в конечной наследственной системе $\mathcal{A}$ выполнено свойство (I2′), то её циклы могут быть только 1- или 2-элементными.

Следствие. Наследственная система $\mathcal{A}$, удовлетворяющая свойству (I2), является наследственной системой неориентированного графа с петлями.

Итоговый результат

Теорема 4. Для любой совместной системы уравнений S над гиперграфом H определённое ей алгебраическое множество может быть задано в виде:

$$V_{\mathrm{H}}(S) = \{(v_1, ..., v_k) \in V^k \mid v_i \in V(x_i);\; x_i, x_j \in Y(t_m) \Rightarrow v_i = v_j;$$
$$E_l(x_{i1}, ..., x_{il}) \in \mathrm{Rad}_H(S) \Rightarrow \{v_{i1}, ..., v_{il}\} \in E_{\mathrm{H}}\}$$

тогда и только тогда, когда гиперграф H является наследственной системой неориентированного графа с петлями.

Спасибо за внимание!