Об одном критическом мультипликативном векторном пространстве

Кислицин А.В.

Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики
Омск, 15–19 июля

18.07.2024

Основные определения и примеры

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством (возможно, подалгеброй) ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как F-алгебра.

В этом случае будем говорить о *мультипликативном векторном пространстве*, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E. Пару (A, E) будем называть *мультипликативной векторной парой* (или кратко, *парой*).

Примером мультипликативного векторного пространства может служить подпространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ алгебры $T_2(F)$ верхнетреугольных матриц второго порядка. В данном случае речь идет о паре $(T_2(F), E_0)$.

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством (возможно, подалгеброй) ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как F-алгебра.

В этом случае будем говорить о *мультипликативном векторном пространстве*, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E. Пару (A, E) будем называть *мультипликативной векторной парой* (или кратко, *парой*).

Примером мультипликативного векторного пространства может служить подпространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ алгебры $T_2(F)$ верхнетреугольных матриц второго порядка. В данном случае речь идет о паре $(T_2(F), E_0)$.

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством (возможно, подалгеброй) ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как F-алгебра.

В этом случае будем говорить о *мультипликативном векторном пространстве*, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E. Пару (A, E) будем называть *мультипликативной векторной парой* (или кратко, *парой*).

Примером мультипликативного векторного пространства может служить подпространство $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ алгебры $T_2(F)$ верхнетреугольных матриц второго порядка. В данном случае речь идет о паре $(T_2(F), E_0)$.

Другими примерами мультипликативных векторных пространств являются:

- $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$;
- $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена «операция» умножения. Однако, результат применения этой «операции» к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

Другими примерами мультипликативных векторных пространств являются:

- $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$;
- $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена «операция» умножения. Однако, результат применения этой «операции» к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

Другими примерами мультипликативных векторных пространств являются:

- $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$;
- $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена «операция» умножения. Однако, результат применения этой «операции» к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

В 1973 году Ю. П. Размыслов ввел понятие слабого тождества ассоциативно-лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ее ассоциативная обертывающая.

Слабым тождеством пары (A, L) называется ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов алгебры L.

Следуя этой конструкции, *слабым тождеством* пары (A, E) (или просто *тождеством* L*-пространства* E) назовем ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов пространства E.

В 1973 году Ю. П. Размыслов ввел понятие слабого тождества ассоциативно-лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ее ассоциативная обертывающая.

Слабым тождеством пары (A, L) называется ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементов алгебры L.

Следуя этой конструкции, *слабым тождеством* пары (A, E) (или просто *тождеством L-пространства E*) назовем ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементов пространства E.

В 1973 году Ю. П. Размыслов ввел понятие слабого тождества ассоциативно-лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ее ассоциативная обертывающая.

Слабым тождеством пары (A, L) называется ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов алгебры L.

Следуя этой конструкции, *слабым тождеством* пары (A, E) (или просто *тождеством L-пространства E*) назовем ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ который обращается в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов пространства E.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

Также в пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_{GF(q)}$ над конечным полем справедливо тождество $x^{q^2-q+1} = x$, которое не выполняется в алгебре $T_2(F)$.

Эти примеры показывают, что тождества мультипликативного векторного пространства могут не выполняться в обертывающей алгебре.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

Также в пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_{GF(q)}$ над конечным полем справедливо тождество $x^{q^2 - q + 1} = x$, которое не выполняется в алгебре $T_2(F)$.

Эти примеры показывают, что тождества мультипликативного векторного пространства могут не выполняться в обертывающей алгебре.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

Также в пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_{GF(q)}$ над конечным полем справедливо тождество $x^{q^2-q+1} = x$, которое не выполняется в алгебре $T_2(F)$.

Эти примеры показывают, что тождества мультипликативного векторного пространства могут не выполняться в обертывающей алгебре.

В сформулированном виде понятие тождества L-пространства впервые встречается в 1989 году в работе И. М. Исаева, хотя в неявном виде фигурирует в работе И. В. Львова 1978 года.

Также тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, которое рассматривалось С. В. Полиным (1976), И. В. Львовым (1978), И. М. Исаевым (1989, 1997).

А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$, то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$, и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является тождеством векторного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ является тождеством $\overline{V}$.

В сформулированном виде понятие тождества L-пространства впервые встречается в 1989 году в работе И. М. Исаева, хотя в неявном виде фигурирует в работе И. В. Львова 1978 года.

Также тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, которое рассматривалось С. В. Полиным (1976), И. В. Львовым (1978), И. М. Исаевым (1989, 1997).

А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$, то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$, и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является тождеством векторного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots, R_{x_n})$ является тождеством $\overline{V}$.

В сформулированном виде понятие тождества L-пространства впервые встречается в 1989 году в работе И. М. Исаева, хотя в неявном виде фигурирует в работе И. В. Львова 1978 года.

Также тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, которое рассматривалось С. В. Полиным (1976), И. В. Львовым (1978), И. М. Исаевым (1989, 1997).

А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$, то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$, и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является тождеством векторного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots, R_{x_n})$ является тождеством $\overline{V}$.

Сравнение с тождествами линейных алгебр

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом.* Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом.* Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом*. Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \dots$, если $f \in L(f_1, f_2, \dots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X \rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E, если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \ldots$, если $f \in L(f_1, f_2, \ldots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E, если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \ldots$, если $f \in L(f_1, f_2, \ldots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E, если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

А именно, $E_1 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$ над бесконечным полем F имеют базисы тождеств, состоящие из многочленов $[x, y]z$ и $x[y, z]$ соответственно (и как алгебры, и как мультипликативные векторные пространства).

Алгебра $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v]\}.$$

Мультипликативное векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v], [x, y]z_1z_2 \ldots z_k[u, v] | k = 1, 2, \ldots\}.$$

А именно, $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над бесконечным полем F имеют базисы тождеств, состоящие из многочленов $[x, y]z$ и $x[y, z]$ соответственно (и как алгебры, и как мультипликативные векторные пространства).

Алгебра $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v]\}.$$

Мультипликативное векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v], [x, y]z_1 z_2 \ldots z_k[u, v] | k = 1, 2, \ldots\}.$$

А именно, $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над бесконечным полем F имеют базисы тождеств, состоящие из многочленов $[x, y]z$ и $x[y, z]$ соответственно (и как алгебры, и как мультипликативные векторные пространства).

Алгебра $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v]\}.$$

Мультипликативное векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ над бесконечным полем имеет базис тождеств

$$\{\mathrm{St}_3(x, y, z), x[y, u]v, [x, y][u, v], [x, y]z_1 z_2 \dots z_k[u, v] | k = 1, 2, \dots\}.$$

Рассмотрим аналоги теоретико-кольцевых конструкций для мультипликативных векторных пар.

Пара (A_2, E_2) называется *подпарой* пары (A_1, E_1), если E_2 является F-подпространством пространства E_1 и A_2 — линейная F-подалгебра алгебры A_1.

Под *гомоморфизмом* ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) мы понимаем такой гомоморфизм линейных F-алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$, при котором $\zeta(E_1)$ содержится в E_2. В этом случае будем также говорить о *гомоморфизме L-пространства* E_1 в E_2.

Ядром $\operatorname{Ker}\zeta$ гомоморфизма ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) будем называть ядро гомоморфизма линейных алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$. Образ пары (A, E) при гомоморфизме ζ будем обозначать через $(A, E)_\zeta$.

Рассмотрим аналоги теоретико-кольцевых конструкций для мультипликативных векторных пар.

Пара (A_2, E_2) называется *подпарой* пары (A_1, E_1), если E_2 является F-подпространством пространства E_1 и A_2 — линейная F-подалгебра алгебры A_1.

Под *гомоморфизмом* ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) мы понимаем такой гомоморфизм линейных F-алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$, при котором $\zeta(E_1)$ содержится в E_2. В этом случае будем также говорить о *гомоморфизме L-пространства* E_1 в E_2.

Ядром $\operatorname{Ker} \zeta$ гомоморфизма ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) будем называть ядро гомоморфизма линейных алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$. Образ пары (A, E) при гомоморфизме ζ будем обозначать через $(A, E)_\zeta$.

Рассмотрим аналоги теоретико-кольцевых конструкций для мультипликативных векторных пар.

Пара (A_2, E_2) называется *подпарой* пары (A_1, E_1), если E_2 является F-подпространством пространства E_1 и A_2 — линейная F-подалгебра алгебры A_1.

Под *гомоморфизмом* ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) мы понимаем такой гомоморфизм линейных F-алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$, при котором $\zeta(E_1)$ содержится в E_2. В этом случае будем также говорить о *гомоморфизме L-пространства* E_1 в E_2.

Ядром $\operatorname{Ker}\zeta$ гомоморфизма ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) будем называть ядро гомоморфизма линейных алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$. Образ пары (A, E) при гомоморфизме ζ будем обозначать через $(A, E)_\zeta$.

Рассмотрим аналоги теоретико-кольцевых конструкций для мультипликативных векторных пар.

Пара (A_2, E_2) называется *подпарой* пары (A_1, E_1), если E_2 является F-подпространством пространства E_1 и A_2 — линейная F-подалгебра алгебры A_1.

Под *гомоморфизмом* ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) мы понимаем такой гомоморфизм линейных F-алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$, при котором $\zeta(E_1)$ содержится в E_2. В этом случае будем также говорить о *гомоморфизме L-пространства* E_1 в E_2.

Ядром $\operatorname{Ker}\zeta$ гомоморфизма ζ пары (A_1, E_1) в пару (A_2, E_2) будем называть ядро гомоморфизма линейных алгебр $\zeta : A_1 \to A_2$. Образ пары (A, E) при гомоморфизме ζ будем обозначать через $(A, E)_\zeta$.

Пусть $\{(A_i, E_i) | i \in I\}$ — множество пар и $\prod\limits_{i\in I} A_i$, $\prod\limits_{i\in I} E_i$ — полные декартовы произведения F-алгебр и векторных пространств соответственно. Ясно, что $E = \prod\limits_{i\in I} E_i$ — подпространство в линейной F-алгебре $\prod\limits_{i\in I} A_i$.

Обозначим через A линейную F-подалгебру в $\prod\limits_{i\in I} A_i$, порожденную E. Пару (A, E) мы будем называть *полным декартовым произведением пар* (A_i, E_i), $i \in I$.

При помощи введенных понятий можно сформулировать аналог теоремы Биркгофа для классов пар, удовлетворяющих некоторому множеству тождеств.

Пусть $\{(A_i, E_i) | i \in I\}$ — множество пар и $\prod\limits_{i \in I} A_i$, $\prod\limits_{i \in I} E_i$ — полные декартовы произведения F-алгебр и векторных пространств соответственно. Ясно, что $E = \prod\limits_{i \in I} E_i$ — подпространство в линейной F-алгебре $\prod\limits_{i \in I} A_i$.

Обозначим через A линейную F-подалгебру в $\prod\limits_{i \in I} A_i$, порожденную E. Пару (A, E) мы будем называть *полным декартовым произведением пар* (A_i, E_i), $i \in I$.

При помощи введенных понятий можно сформулировать аналог теоремы Биркгофа для классов пар, удовлетворяющих некоторому множеству тождеств.

Пусть $\{(A_i, E_i) | i \in I\}$ — множество пар и $\prod\limits_{i \in I} A_i$, $\prod\limits_{i \in I} E_i$ — полные декартовы произведения F-алгебр и векторных пространств соответственно. Ясно, что $E = \prod\limits_{i \in I} E_i$ — подпространство в линейной F-алгебре $\prod\limits_{i \in I} A_i$.

Обозначим через A линейную F-подалгебру в $\prod\limits_{i \in I} A_i$, порожденную E. Пару (A, E) мы будем называть *полным декартовым произведением пар* (A_i, E_i), $i \in I$.

При помощи введенных понятий можно сформулировать аналог теоремы Биркгофа для классов пар, удовлетворяющих некоторому множеству тождеств.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств G* и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

Если $G \subseteq F\langle X\rangle$ — базис тождеств пары (A, E), то L-многообразие, заданное множеством тождеств G, будем называть *L-многообразием, порожденным парой* (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Если из контекста ясно, какая алгебра является обертывающей для пространства E, то информацию об этой алгебре будем опускать, и писать $\mathrm{Var}_L E$ вместо $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств* G и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

Если $G \subseteq F\langle X\rangle$ — базис тождеств пары (A, E), то L-многообразие, заданное множеством тождеств G, будем называть *L-многообразием, порожденным парой* (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Если из контекста ясно, какая алгебра является обертывающей для пространства E, то информацию об этой алгебре будем опускать, и писать $\mathrm{Var}_L E$ вместо $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств* G и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

Если $G \subseteq F\langle X\rangle$ — базис тождеств пары (A, E), то L-многообразие, заданное множеством тождеств G, будем называть *L-многообразием, порожденным парой* (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Если из контекста ясно, какая алгебра является обертывающей для пространства E, то информацию об этой алгебре будем опускать, и писать $\mathrm{Var}_L E$ вместо $\mathrm{Var}_L(A, E)$.

Нетрудно показать, что любое многообразие пар замкнуто относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар.

Адаптировав рассуждение, принадлежащее Биркгофу, можно увидеть, что верно и обратное: любой класс мультипликативных векторных пар, замкнутый относительно этих трех операций, образует многообразие.

Это утверждение показывает, как пара (A, E) порождает L-многообразие, минуя язык тождеств, использованный выше.

Нетрудно показать, что любое многообразие пар замкнуто относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар.

Адаптировав рассуждение, принадлежащее Биркгофу, можно увидеть, что верно и обратное: любой класс мультипликативных векторных пар, замкнутый относительно этих трех операций, образует многообразие.

Это утверждение показывает, как пара (A, E) порождает L-многообразие, минуя язык тождеств, использованный выше.

Нетрудно показать, что любое многообразие пар замкнуто относительно взятия подпар, гомоморфных образов и декартовых произведений пар.

Адаптировав рассуждение, принадлежащее Биркгофу, можно увидеть, что верно и обратное: любой класс мультипликативных векторных пар, замкнутый относительно этих трех операций, образует многообразие.

Это утверждение показывает, как пара (A, E) порождает L-многообразие, минуя язык тождеств, использованный выше.

Многообразие алгебр над конечным полем называется *локально конечным*, если любая конечно порожденная алгебра из этого многообразия конечна.

L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем *локально конечным*, если для любой пары $(A, E) \in \mathcal{M}$, где E — конечномерное векторное пространство, алгебра A конечна.

Заметим, что L-многообразие, порожденное L-пространством E с конечной ассоциативной обертывающей алгеброй A, является локально конечным.

Многообразие алгебр над конечным полем называется *локально конечным*, если любая конечно порожденная алгебра из этого многообразия конечна.

L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем *локально конечным*, если для любой пары $(A, E) \in \mathcal{M}$, где E — конечномерное векторное пространство, алгебра A конечна.

Заметим, что L-многообразие, порожденное L-пространством E с конечной ассоциативной обертывающей алгеброй A, является локально конечным.

Многообразие алгебр над конечным полем называется *локально конечным*, если любая конечно порожденная алгебра из этого многообразия конечна.

L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем *локально конечным*, если для любой пары $(A, E) \in \mathcal{M}$, где E — конечномерное векторное пространство, алгебра A конечна.

Заметим, что L-многообразие, порожденное L-пространством E с конечной ассоциативной обертывающей алгеброй A, является локально конечным.

Фактором пары (A, E) будем называть пару $(A_1, E_1)_\varphi$, где (A_1, E_1) — подпара пары (A, E). Если φ не является изоморфизмом, либо $E_1 \subsetneqq E$, то фактор называется *собственным*.

Пару (A, E) назовем *критической*, если алгебра A конечна, и пара (A, E) не лежит в L-многообразии, порожденном ее собственными факторами. В этом случае будем также говорить о критическом векторном пространстве E.

Заметим, что как в случае колец и линейных алгебр, всякое локально конечное L-многообразие порождается своими критическими парами.

Фактором пары (A, E) будем называть пару $(A_1, E_1)_\varphi$, где (A_1, E_1) — подпара пары (A, E). Если φ не является изоморфизмом, либо $E_1 \subsetneqq E$, то фактор называется *собственным*.

Пару (A, E) назовем *критической*, если алгебра A конечна, и пара (A, E) не лежит в L-многообразии, порожденном ее собственными факторами. В этом случае будем также говорить о критическом векторном пространстве E.

Заметим, что как в случае колец и линейных алгебр, всякое локально конечное L-многообразие порождается своими критическими парами.

Фактором пары (A, E) будем называть пару $(A_1, E_1)_\varphi$, где (A_1, E_1) — подпара пары (A, E). Если φ не является изоморфизмом, либо $E_1 \subsetneqq E$, то фактор называется *собственным*.

Пару (A, E) назовем *критической*, если алгебра A конечна, и пара (A, E) не лежит в L-многообразии, порожденном ее собственными факторами. В этом случае будем также говорить о критическом векторном пространстве E.

Заметим, что как в случае колец и линейных алгебр, всякое локально конечное L-многообразие порождается своими критическими парами.

Ю. Н. Мальцев в 1984 году показал, что кольцо матриц над критическим кольцом является критическим.

И. М. Исаев и докладчик показали критичность пар $(M_2(F), M_2(F))$, $(T_2(F), T_2(F))$, (E_1, E_1), (E_2, E_2) над конечным полем F, где по-прежнему $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ (работа не опубликована).

Во всех рассмотренных парах векторное пространство совпадает с обертывающей алгеброй.

В настоящей работе построено критическое мультипликативное векторное пространство, не являющееся алгеброй.

Ю. Н. Мальцев в 1984 году показал, что кольцо матриц над критическим кольцом является критическим.

И. М. Исаев и докладчик показали критичность пар $(M_2(F), M_2(F))$, $(T_2(F), T_2(F))$, (E_1, E_1), (E_2, E_2) над конечным полем F, где по-прежнему $E_1 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_F$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$ (работа не опубликована).

Во всех рассмотренных парах векторное пространство совпадает с обертывающей алгеброй.

В настоящей работе построено критическое мультипликативное векторное пространство, не являющееся алгеброй.

Ю. Н. Мальцев в 1984 году показал, что кольцо матриц над критическим кольцом является критическим.

И. М. Исаев и докладчик показали критичность пар $(M_2(F), M_2(F))$, $(T_2(F), T_2(F))$, (E_1, E_1), (E_2, E_2) над конечным полем F, где по-прежнему $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ (работа не опубликована).

Во всех рассмотренных парах векторное пространство совпадает с обертывающей алгеброй.

В настоящей работе построено критическое мультипликативное векторное пространство, не являющееся алгеброй.

Ю. Н. Мальцев в 1984 году показал, что кольцо матриц над критическим кольцом является критическим.

И. М. Исаев и докладчик показали критичность пар $(M_2(F), M_2(F))$, $(T_2(F), T_2(F))$, (E_1, E_1), (E_2, E_2) над конечным полем F, где по-прежнему $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ (работа не опубликована).

Во всех рассмотренных парах векторное пространство совпадает с обертывающей алгеброй.

В настоящей работе построено критическое мультипликативное векторное пространство, не являющееся алгеброй.

Теорема 1

Мультипликативное векторное пространство

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

над полем $\mathbb{Z}_2$ является критическим.

Теорема 2

Мультипликативное векторное пространство E_0 над полем $\mathbb{Z}_2$:

1) является почти коммутативным;
2) является почти энгелевым;
3) является почти НКБ-пространством.

Теорема 1

Мультипликативное векторное пространство

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

над полем $\mathbb{Z}_2$ является критическим.

Теорема 2

Мультипликативное векторное пространство E_0 над полем $\mathbb{Z}_2$:

1) является почти коммутативным;
2) является почти энгелевым;
3) является почти НКБ-пространством.

Спасибо за внимание!