

Спектр Райдемайстера

История одного понятия

Е. Г. Кукина.

Международная конференция
«Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики»

18.07.2024

Определение

Пусть $\phi : G \rightarrow G$ — произвольный автоморфизм группы G . Говорят, что элементы $f, g \in G$ ϕ -сопряжены, если $\exists x \in G : \phi(x)g = fx$.
Обозначение $f \sim_{\phi} g$.

Определение

Пусть $\phi : G \rightarrow G$ — произвольный автоморфизм группы G . Говорят, что элементы $f, g \in G$ ϕ -сопряжены, если $\exists x \in G : \phi(x)g = fx$.

Обозначение $f \sim_{\phi} g$.

Количество классов ϕ -эквивалентности $R(\phi)$ называется числом Райдемайстера автоморфизма ϕ .

Определение

Пусть $\phi : G \rightarrow G$ — произвольный автоморфизм группы G . Говорят, что элементы $f, g \in G$ ϕ -сопряжены, если $\exists x \in G : \phi(x)g = fx$.

Обозначение $f \sim_{\phi} g$.

Количество классов ϕ -эквивалентности $R(\phi)$ называется числом Райдемайстера автоморфизма ϕ .

Определение

Спектр Райдемайстера группы G — множество всех чисел Райдемайстера автоморфизмов данной группы.

$$\text{Spec}(G) = \{R(\phi) \mid \phi \in \text{Aut}(G)\}$$

Определение

Пусть $\phi : G \rightarrow G$ — произвольный автоморфизм группы G . Говорят, что элементы $f, g \in G$ ϕ -сопряжены, если $\exists x \in G : \phi(x)g = fx$.

Обозначение $f \sim_{\phi} g$.

Количество классов ϕ -эквивалентности $R(\phi)$ называется числом Райдемайстера автоморфизма ϕ .

Определение

Спектр Райдемайстера группы G — множество всех чисел Райдемайстера автоморфизмов данной группы.

$$\text{Spec}(G) = \{R(\phi) \mid \phi \in \text{Aut}(G)\}$$

$$\text{ExtSpec}(G) = \{R(\phi) \mid \phi \in \text{End}(G)\}$$

Впервые понятие спектр Райдемайстера возникло в работах В.А.Романькова и Е.Г.Кукиной в 2009 году.

Предыстория

Говорят, что группы, для которых $\text{Spec}(G) = \{\infty\}$, обладают свойством R_∞ .

Вопрос о том, какие группы обладают свойством R_∞ сформулировали А.Фельштын и Р.Хилл в 1994 году.

- неэлементарные гиперболические по Громову группы;
- группы Ваумслага-Солитера за исключением $B(1,1)$;
- относительно гиперболические группы;
- группы Григорчука и Гунты-Сидки;

Группы, обладающие R_∞ , продолжают исследоваться.

Предыстория

Говорят, что группы, для которых $\text{Spec}(G) = \{\infty\}$, обладают свойством R_∞ .

Вопрос о том, какие группы обладают свойством R_∞ сформулировали А.Фельштын и Р.Хилл в 1994 году.

- неэлементарные гиперболические по Громову группы;
- группы Ваумслага-Солитера за исключением $B(1,1)$;
- относительно гиперболические группы;
- группы Григорчука и Гунты-Сидки;

Группы, обладающие R_∞ , продолжают исследоваться.

В работе 2007 года Ф.К.Индукеева изучена группа Гейзенберга N_{22} , доказано, что в ее спектре содержатся четные натуральные числа.

Первые работы

В работе 2009 года Е.Г. Кукиной вычислен спектр Райдемайстера бесконечных абелевых групп.

- $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{2, \infty\}$
- $\text{Spec}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (группа полного спектра)

В работе 2009 года В.А.Романькова и Е.Г.Кукиной рассмотрены спектры свободных нильпотентных групп.

- $\text{Spec}(N_{22}) = 2\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\text{Spec}(N_{32}) = \{2k - 1 | k \in \mathbb{N}\} \cup \{4k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$
- $\text{Spec}(N_{23}) = \{2k^2 | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$
- $N_{2c}, c \geq 4 \in R_\infty$

Первые работы




В работе В.А. Романькова+Е.Г.Кукиной 2009 года, кроме того:

- Любая свободная разрешимая группа S_{2t} ранга 2 класса $t \geq 2$ (в частности метабелева M_2) удовлетворяет R_∞ .
- Любая свободная разрешимая группа S_{3t} ранга 3 класса $t \geq 4 \in R_\infty$.
- Любая свободная разрешимая группа S_{rt} ранга $r \geq 4$ класса $t \geq \log_2(2r + 1) \in R_\infty$.

В работе В.А.Романькова 2009 года

- N — конечнопорожденная нильпотентная группа. Построен алгоритм, который по автоморфизму находит $R(\phi)$.
- N_{rc} — свободная нильпотентная группа. Если $r = 2, 3, c \geq 4r$ или $r \geq 4, c \geq 2r$, то она R_∞

Первые работы

-  Е.Г.Кукина, Спектры Райдемайстера свободных абелевых групп и свободных нильпотентных групп степени 2 рангов 2 и 3/ / В сб. «Математика и информатика: наука и образование : Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник» Вып. 8. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 2009.
-  E.G.Kukina, V.A.Roma'nikov, On the Reidemeister spectrum and the R_∞ for some free nilpotent groups. // arxiv:math.GR/0903.3455, 2009
-  V.A.Roman'kov. Twisted conjugacy classes in nilpotent groups.// J. Pure Appl. Algebra, 215 No. 4, 2011.

Следующие шаги

Уже в 2009 году возникают статьи других авторов, использующие понятие спектр Райдемайстера.






Фельштын-Гонсалвес, 2009 год.

- Вычислены спектры метабелевых групп вида $\mathbb{Q}^n \rtimes \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right]^n \rtimes \mathbb{Z}$.
- $\text{Spec}(\mathbb{Q}) = \{1\} \cup \{\infty\}$
- $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]) = \{p^\alpha + 1, p^\alpha - 1 \mid \alpha \geq 0\} \cup \{\infty\}$, p — нечетное простое.
- $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/2]) = \{2^\alpha + 1, 2^\alpha - 1 \mid \alpha \geq 1\} \cup \{\infty\}$

Горнова-Кукина, 2013 год.

$$\text{Spec} \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n} \right] \right) = \left\{ \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} \mid \alpha_i \beta_i = 0 \right\} \cup \{\infty\}.$$

Работы В.А.Романькова и его учеников

-  Э.Вентура, В.А.Романьков, Проблема скрученной сопряжённости для эндоморфизмов метабелевых групп. // Алгебра и логика, 48:2 (2009).
-  М.Н.Горнова, Е.Г.Кукина, В.А.Романьков, Криптографический анализ протокола аутентификации Ушакова–Шпильрайна, основанного на проблеме бинарно скрученной сопряжённости// ПДМ, 2015, 2(28).
-  В.А.Романьков, О разрешимости уравнений с эндоморфизмами в нильпотентных группах// Сиб. электрон. матем. изв., 13 (2016).
-  М.Н.Горнова, Е.Г.Кукина, Спектр Райдемайстера аддитивной группы кольца $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots, \frac{1}{p_n} \right]$ //Вестн. Ом. ун-та. 2013, 4.
-  Лешков В.Э. Расширенные спектры Райдемайстера некоммутативных групп порядка 8 // Вестн. Ом. ун-та. 2018. Т. 18

Дальнейшие работы






Начиная с 2013 года начали появляться работы других ученых, эксплуатирующие понятие "Спектр Райдемайстера".

Например, в статье 2018 года Т.Р.Насыбуллов изучает спектр Райдемайстера унитарных групп.



В статье 2017 года К.Декимпе, Т.Кайзера и С.Тертооя вычисляются спектры Райдемайстера некоторых кристаллографических групп малых размерностей, в частности и таких, когда эти группы не обладают свойством R_∞

В последнее время, после 2021 года тема получила богатое развитие в работах К.Декимпе и его учеников, С.Тертооя, П.Сендена.






Работы других ученых. Тимур Ринатович Насыбуллов.

-  Т. Р. Насыбуллов, Классы скрученной сопряжённости в общей и специальной линейных группах // Алгебра и логика, 51, № 3 (2012), 331—346
-  Т. Р. Насыбуллов, Классы скрученной сопряжённости в группах Шевалле. // Алгебра и логика, 53:6 (2014), 735—763; Algebra and Logic, 53:6 (2015).
-  T. Nasybullov, Reidemeister spectrum of special and general linear groups over some fields contains 1. // arXiv:1708.06280, 2017
-  T. Nasybullov, Twisted conjugacy classes in unitriangular groups. // arXiv:1805.05160, 2018
-  D. Gonçalves, T. Nasybullov, On groups where the twisted conjugacy class of the unit element is a subgroup // Comm.of Algebra, 45, 2019.






Работы других ученых. Другие

-  A.Fel'shtyn, D.Gonçalves, Reidemeister spectrum for metabelian groups of the form $\mathbb{Q}^n \rtimes \mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}[1/p]^n \rtimes \mathbb{Z}$, p prime. //arXiv:math.GR/0909.3128, 2009.
-  A.Fel'shtyn, E. Troitsky, Aspects of the property R_∞ . // J. Group Theory 18(2015), no.6, 1021–1034.
-  Е.В.Троицкий, Классы Райдемайстера, сплетения и разрешимость. // Матем. заметки, 114:6 (2023), 949–953; Math. Notes, 114:6 (2023), 1494–1498
-  P.M. Lins de Araujo, Y. Santos Rego, Reidemeister numbers for arithmetic Borel subgroups in type A //arXiv:2306.02936, 2023

Работы других ученых. Карел Декимпе и ученики

-  K. Dekimpe, D. Gonçalves. The R_∞ for free groups, free nilpotent groups and free solvable groups. // arxiv:math.GR/1303.1346v1, 2013
-  K.Dekimpe, T.Kaiser, S.Tertooy, The Reidemeister spectra of low dimensional crystallographic groups. //Journal of Algebra 533:353-375, 2019.
-  K.Dekimpe, S.Tertooy, I. Van den Bussche, Reidemeister spectra for solvmanifolds in low dimensions. //arXiv:1711.08650, 2019
-  K.Dekimpe, M.Lathouwers, The Reidemeister spectrum of 2-step nilpotent groups determined by graphs. //Communications in Algebra 51(6):1-24, 2022
-  K.Dekimpe, M.Lathouwers, The twisted conjugacy growth of virtually abelian groups. //arXiv:2401.05046, 2024

Работы других ученых. Карел Декимпе и ученики

-  S. Tertooy, The Reidemeister spectrum of low dimensional almost-crystallographic groups//arXiv:1901.05393, 2019
-  P. Senden, The Reidemeister spectrum of split metacyclic groups. //arXiv:2105.01398, 2022
-  P. Senden, The Reidemeister spectrum of finite abelian groups.//arXiv:2205.15740, 2022
-  P. Senden, direct products of nilpotent groups//arXiv:2206.13853, 2022
-  S. Tertooy, Extreme Reidemeister spectra of finite groups//arXiv:2311.12594,2023

Виталий Анатольевич Романьков

