Неравенства для перманента и определителя кватернионных матриц

А.И. Латыпова

Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель – д. ф.-м. н. А.Э. Гутерман

Определение 1

Произведение Адамара (произведение Шура) – бинарная операция над двумя матрицами одинаковой размерности, результатом которой является матрица той же размерности, (i,j)-ый элемент которой – произведение (i,j)-ого элемента первой матрицы и (i,j)-ого элемента второй матрицы.

Обозначим произведение Адамара матриц A и B следующим образом: $A \circ B$.

Определение 2

Пусть $A \in M(n, \mathbb{C})$ и пусть S_n – симметрическая группа из n элементов. Тогда перманентом комплексной матрицы A размера $n \times n$ назовём следующую функцию от элементов матрицы:

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Неравенства для комплексных матриц

В 1930-м году Оппенгейм доказал следующее неравенство для комплексных положительно полуопределённых матриц:

Неравенство Оппенгейма (1930)

Пусть $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ и $A, B \geq 0$. Тогда $\det(A \circ B) \geq \det A \det B$.

В 1982-м году Холлет выдвинул предположение, что верна аналогичная гипотеза для перманентов:

Гипотеза Холетта

Пусть $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ и $A, B \geq 0$. Тогда $\operatorname{per}(A \circ B) \leq \operatorname{per} A \operatorname{per} B$.

Эта гипотеза была доказана только для $n = 2, 3$ и 4.

Предварительные сведения о кватернионах

Зафиксируем упорядоченный базис $1, i, j, k$ в четырехмерном вещественном векторном пространстве $\mathbb{H}$ (положим $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, векторному пространству столбцов, состоящих из четырех вещественных компонент), и зададим умножение в $\mathbb{H}$ следующими формулами:

$$1i = i1 = i, 1j = j1 = j, 1k = k1 = k,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, 1^2 = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

Определение 3

Множество $\mathbb{H}$ с упомянутыми выше алгебраическими операциями и операциями векторного пространства называется алгеброй кватернионов.

Введём для кватернионов понятие сопряжения. Если кватернион

$$y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k, \text{ где } y_i \in \mathbb{R},$$

то сопряжённым к нему называется кватернион

$$\bar{y} = y_0 - y_1 i - y_2 j - y_3 k.$$

Определение 4

Кватернионные матрицы – матрицы, элементами которых являются кватернионы.

Будем обозначать кватернионные матрицы размера $n \times n$ следующим образом: $M(n, \mathbb{H})$.

Предварительные сведения о кватернионах

Определение 5

Кватернионная матрица A эрмитова, если $A^* = A$.

Определение 6

Кватернионная матрица $A > 0$ (положительно определена), если для любого ненулевого вектора x верно следующее: $x^* A x > 0$.

Определение 7

Кватернионная матрица $A \geq 0$ (положительно полуопределена), если для любого вектора x верно следующее: $x^* A x \geq 0$.

Предварительные сведения о кватернионах

Теорема

Пусть A – кватернионная квадратная матрица и $x^*Ax \in \mathbb{R}$ для любого вектор-столбца x. Тогда A – эрмитова.

Таким образом, получаем, что положительно определённые (и положительно полуопределённые) матрицы эрмитовы, причём как в комплексном, так и кватернионном случае.

Детерминант кватернионной матрицы

Далее будем рассматривать $n > 1$.

Определение 8

Детерминантом кватернионной матрицы размера $n \times n$ назовём функцию $d : M(n, \mathbb{H}) \to \mathbb{H}$, если она удовлетворяет следующим трём свойствам:

1. $d(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A вырождена.
2. $d(AB) = d(A)d(B)$ для любых матриц A и $B \in M(n, \mathbb{H})$.
3. Если A' получена из A добавлением строки, умноженной на некоторый кватернион слева, к другой строке или добавлением столбца, умноженного на некоторый кватернион справа, к другому стролбцу, $d(A) = d(A')$.

Детерминант кватернионной матрицы

Замечание

Любая детерминантная функция вещественна и, более того, неотрицательна.

В основном в работе рассмаривалась следующая детерминантная функция:

Определение 9

Пусть матрица $A \in M(n, \mathbb{H})$. Тогда определителем кватернионной матрицы, основанном на комплексном представлении, назовём функцию

$$\det{}_{C} A := \det\left(\omega_{n,n}(A)\right),$$

где $\omega_{n,n}$ – отображение, при котором элемент $\alpha = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ матрицы A переходит в следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix}$$

Перманент кватернионной матрицы

Понятие перманента кватернионных матриц мы ввели сами, также основываясь на комплексном представлении кватернионной матрицы:

Определение 10

Пусть матрица $A \in M(n, \mathbb{H})$. Тогда перманентом кватернионной матрицы, основанном на комплексном представлении, назовём функцию

$$\operatorname{per}_{C} A := \operatorname{per}\left(\omega_{n,n}(A)\right).$$

Неравенства для кватернионных матриц

Удалось доказать следующие теоремы:

Теорема 1

Перманент кватернионной матрицы – вещественное число.

Теорема 2

Пусть $A, B \in M(2, \mathbb{H}), A, B \geq 0$. Тогда $\det_C(A \circ B) \geq \det_C A \det_C B$.

Теорема 3

Пусть $A, B \in M(2, \mathbb{H}), A, B \geq 0$. Тогда $\mathrm{per}_C(A \circ B) \leq \mathrm{per}_C A \,\mathrm{per}_C B$.

Неравенства для кватернионных матриц

Теорема 4

Для любого фиксированного n неравенство, аналогичное неравенству Оппенгейма, либо верно, либо неверно для всех детерминантных функций одновременно.

Замечание

Если существует размерность матриц, для которой неравенства, аналогичные неравенству Оппенгейма или Холетта, неверны, то и для всех больших размерностей неравенства также неверны.

Спасибо за внимание!