Об алгебраических свойствах некоторых классов функций

А.С. Морозов

ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева

morozov@math.nsc.ru

Перестановки, вычислимые в тьюринговых идеалах

Тьюрингов идеал: произвольное множество I тьюринговых степеней со свойствами

1. $\mathbf{0} \in I$
2. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \in I \to \mathbf{a} \in I$
3. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I \to \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \in I$

$$G_I = \{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \deg f \in I\}$$

$$F_I = \{f : \omega \to \omega \mid \deg f \in I\}$$

Перестановки, вычислимые в тьюринговых идеалах

Тьюрингов идеал: произвольное множество I тьюринговых степеней со свойствами

1. $\mathbf{0} \in I$
2. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \in I \to \mathbf{a} \in I$
3. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I \to \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \in I$

$$G_I = \{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \deg f \in I\}$$

$$F_I = \{f : \omega \to \omega \mid \deg f \in I\}$$

Теорема (М., 1997)

Тьюринговы идеалы полностью определяются своими группами (полугруппами):

$$G_I \hookrightarrow G_J \;\Leftrightarrow\; F_I \hookrightarrow F_J \;\Leftrightarrow\; I \subseteq J$$

$$G_I \cong G_J \;\Leftrightarrow\; F_I \cong F_J \;\Leftrightarrow\; I = J$$

Существуют вычислимые $g_0, g_1, z \in \mathrm{Sym}(\omega)$ такие, что для любого A перечислимого в некотором элементе из I существует $b_A \in G_I$ со свойством

$$n \in A \Leftrightarrow \left[g_0^{z^n}, b_A\right] \neq 1 \vee \left[g_1^{z^n}, b_A\right] \neq 1$$

В группе G_J, $\left[g_i^{z^n}, b_A\right] \neq 1 \Leftrightarrow \exists t \; \left[g_i^{z^n}, b_A\right](t) \neq t$ — в.п. условие. Отсюда следует, что A в.п. в G_J. Следовательно, $I \subseteq J$.

Тьюрингова сводимость $\sim$ изоморфная вложимость

Частный случай тьюрингова идеала: $\widehat{\mathbf{d}} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \leqslant \mathbf{d}\}$

Обозначим $G_{\mathbf{d}} = G_{\widehat{\mathbf{d}}} \quad (= \{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \deg(f) \leqslant \mathbf{d}\})$

Теорема (М., 1997)

Тьюрингова степень полностью определяется своей группой (полугруппой):

$$G_{\mathbf{c}} \hookrightarrow G_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; F_{\mathbf{c}} \hookrightarrow F_{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \mathbf{c} \leqslant \mathbf{d}$$

$$G_{\mathbf{c}} \cong G_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; F_{\mathbf{c}} \cong F_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{c} = \mathbf{d}$$

Тьюрингова сводимость $\sim$ изоморфная вложимость

Частный случай тьюрингова идеала: $\widehat{\mathbf{d}} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} \leqslant \mathbf{d}\}$

Обозначим $G_{\mathbf{d}} = G_{\widehat{\mathbf{d}}} \quad (= \{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \deg(f) \leqslant \mathbf{d}\})$

Теорема (М., 1997)

Тьюрингова степень полностью определяется своей группой (полугруппой):

$$G_{\mathbf{c}} \hookrightarrow G_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; F_{\mathbf{c}} \hookrightarrow F_{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \mathbf{c} \leqslant \mathbf{d}$$

$$G_{\mathbf{c}} \cong G_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; F_{\mathbf{c}} \cong F_{\mathbf{d}} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{c} = \mathbf{d}$$

Вопрос (А. Нис): Верно ли, что $G_{\mathbf{s}}/\mathrm{Fin} \hookrightarrow G_{\mathbf{d}}/\mathrm{Fin} \Leftrightarrow \mathbf{s}' \leqslant \mathbf{d}'$?

Импликация "$\Rightarrow$" верна.

Тьюринговы степени групп G_I

Что такое тьюрингова степень группы:

Тьюрингова степень $\mathbf{d}$ называется степенью группы G если для любой степени $\mathbf{s}$ G имеет $\mathbf{s}$–вычислимую изоморфную копию тогда и только тогда, когда $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{s}$.

Теорема (М., 1988)

$\deg G_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., 2024)

$\deg \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}(\mathbb{Q}, \leqslant) = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., М. Файзрахманов, В. Пузаренко, 2021)

Существует счётный тьюрингов идеал I такой, что G_I не имеет степени.

Тьюринговы степени групп G_I

Что такое тьюрингова степень группы:
Тьюрингова степень $\mathbf{d}$ называется степенью группы G если для любой степени $\mathbf{s}$ G имеет $\mathbf{s}$–вычислимую изоморфную копию тогда и только тогда, когда $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{s}$.

Теорема (М., 1988)

$\deg G_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., 2024)

$\deg \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}(\mathbb{Q}, \leqslant) = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., М. Файзрахманов, В. Пузаренко, 2021)

Существует счётный тьюрингов идеал I такой, что G_I не имеет степени.

Тьюринговы степени групп G_I

Что такое тьюрингова степень группы:
Тьюрингова степень $\mathbf{d}$ называется степенью группы G если для любой степени $\mathbf{s}$ G имеет $\mathbf{s}$–вычислимую изоморфную копию тогда и только тогда, когда $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{s}$.

Теорема (М., 1988)

$\deg G_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., 2024)

$\deg \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}(\mathbb{Q}, \leqslant) = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., М. Файзрахманов, В. Пузаренко, 2021)

Существует счётный тьюрингов идеал I такой, что G_I не имеет степени.

Тьюринговы степени групп G_I

Что такое тьюрингова степень группы:

Тьюрингова степень $\mathbf{d}$ называется степенью группы G если для любой степени $\mathbf{s}$ G имеет $\mathbf{s}$–вычислимую изоморфную копию тогда и только тогда, когда $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{s}$.

Теорема (М., 1988)

$\deg G_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., 2024)

$\deg \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}(\mathbb{Q}, \leqslant) = \mathbf{d}''$.

Теорема (М., М. Файзрахманов, В. Пузаренко, 2021)

Существует счётный тьюрингов идеал I такой, что G_I не имеет степени.

Конечно порождённые подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$

Факт: для любой конечно порождённой подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$ проблема равенства слов перечислима:

$$t(g_1,\ldots,g_n)\neq 1 \Leftrightarrow \exists x\big(t(g_1,\ldots,g_n)(x)\neq x\big).$$

Вопрос Г. Хигмана:

Верно ли, что любая конечно порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов вложима в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$?

Теорема (М.)

Существует $\mathbf{2}$*–порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов, невложимая в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$.

Конечно порождённые подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$

Факт: для любой конечно порождённой подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$ проблема равенства слов перечислима:

$$t(g_1, \dots, g_n) \neq 1 \Leftrightarrow \exists x \big(t(g_1, \dots, g_n)(x) \neq x \big).$$

Вопрос Г. Хигмана:

Верно ли, что любая конечно порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов вложима в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$?

Теорема (М.)

Существует $\mathbf{2}$–порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов, невложимая в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$.

Конечно порождённые подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$

Факт: для любой конечно порождённой подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$ проблема равенства слов перечислима:

$$t(g_1, \ldots, g_n) \neq 1 \Leftrightarrow \exists x \big(t(g_1, \ldots, g_n)(x) \neq x \big).$$

Вопрос Г. Хигмана:

Верно ли, что любая конечно порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов вложима в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$?

Теорема (М.)

Существует **2***–порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов, невложимая в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$.

Теорема (М., П. Шупп, 2019)

Для любой перечислимой tt–степени $\mathbf{d}$ *существует* $\mathbf{2}$*–порождённая полугруппа в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$*, у которой проблема равенства слов имеет степень* $\mathbf{d}$*.*

(Ранее А. Нис и А. Сорби построили 3–порождённый пример)

Теорема (М., П. Шупп, 2019)

Для любой в.п tt–степени $\mathbf{d}$ *существует* $\mathbf{2}$*–порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов степени* $\mathbf{d}$*, невложимая в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$*.*

Теорема (М., П. Шупп, 2019)

Для любой перечислимой tt–степени $\mathbf{d}$ *существует* $\mathbf{2}$*–порождённая полугруппа в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$*, у которой проблема равенства слов имеет степень* $\mathbf{d}$*.*

(Ранее А. Нис и А. Сорби построили 3–порождённый пример)

Теорема (М., П. Шупп, 2019)

Для любой в.п tt–степени $\mathbf{d}$ *существует* $\mathbf{2}$*–порождённая группа с коперечислимой проблемой равенства слов степени* $\mathbf{d}$*, невложимая в* $\mathrm{Aut}_r(\omega)$*.*

Примитивно рекурсивные перестановки

Теорема (А.В. Кузнецов, 1950)

Примитивно рекурсивные перестановки не образуют группу: существует примитивно рекурсивная перестановка, обратная к которой не примитивно рекурсивна.

Тем не менее, множество примитивно рекурсивных перестановок, обратные к которым также примитивно рекурсивны, образуют группу по композиции.

Теорема (П.А. Куликов, 2006, не опубликовано)

Группа всех примитивно рекурсивных перестановок, обратные к которым примитивно рекурсивны, имеет степень $\mathbf{0}'$.

Примитивно рекурсивные перестановки

Теорема (А.В. Кузнецов, 1950)

Примитивно рекурсивные перестановки не образуют группу: существует примитивно рекурсивная перестановка, обратная к которой не примитивно рекурсивна.

Тем не менее, множество примитивно рекурсивных перестановок, обратные к которым также примитивно рекурсивны, образуют группу по композиции.

Теорема (П.А. Куликов, 2006, не опубликовано)

Группа всех примитивно рекурсивных перестановок, обратные к которым примитивно рекурсивны, имеет степень $\mathbf{0}'$.

Теорема (В.В. Козьминых, 1972)

Группа всех вычислимых перестановок порождается примитивно рекурсивными перестановками:

Любая вычислимая перестановка есть произведение не более чем 6 примитивно рекурсивных перестановок и обратных к ним.

Некоторые уточнения были сделаны Д.Х. Зайнетдиновым и И.Ш. Калимуллиным.

Вопросы: Что можно сказать о множестве всех полиномиально вычислимых перестановок? Образует ли оно группу? Какова степень группы всех полиномиально вычислимых перестановок, обратные к которым полиномиально вычислимы?

Теорема (В.В. Козьминых, 1972)

Группа всех вычислимых перестановок порождается примитивно рекурсивными перестановками:

Любая вычислимая перестановка есть произведение не более чем 6 примитивно рекурсивных перестановок и обратных к ним.

Некоторые уточнения были сделаны Д.Х. Зайнетдиновым и И.Ш. Калимуллиным.

Вопросы: Что можно сказать о множестве всех полиномиально вычислимых перестановок? Образует ли оно группу? Какова степень группы всех полиномиально вычислимых перестановок, обратные к которым полиномиально вычислимы?

Алгоритмические сводимости и группы

Напомним:
Для любой тьюринговой степени **d** множество

$$G_{\mathbf{d}} = \{f \mid f - \mathbf{d}\text{–вычислимая перествновка на } \omega\}$$

образует группу по композиции.

Как насчёт других сводимостей?
Верно ли, что множество перестановок, сводящихся к некоторому фиксированному множеству, образует группу?

Во многих случаях ответ отрицательный:

Теорема (К.В. Коровин, 1999)

Для wtt–сводимости и любой более сильной сводимости существует множество $F \leqslant_T \mathbf{0}'$, для которого множество

$$\{f \mid f \text{ — перестановка на } \omega \text{ и её график сводится к } F\}$$

не замкнуто относительно композиции (и даже относительно возведения в квадрат!).
Т.е. для любой такой сводимости множество перестановок, сводимых к некоторому множеству, может не образовывать группу.

Вопрос. Описать все множества A, для которых множество $\{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \Gamma(f) \leqslant_m A\}$ образует группу.
Например, таковым являются m–Σ^0_n–полные множества.

Теорема (К.В. Коровин, 1999)

Для wtt–сводимости и любой более сильной сводимости существует множество $F \leqslant_T \mathbf{0}'$, для которого множество

$$\{f \mid f \text{ — перестановка на } \omega \text{ и её график сводится к } F\}$$

не замкнуто относительно композиции (и даже относительно возведения в квадрат!).
Т.е. для любой такой сводимости множество перестановок, сводимых к некоторому множеству, может не образовывать группу.

Вопрос. Описать все множества A, для которых множество $\{f \in \mathrm{Sym}(\omega) \mid \Gamma(f) \leqslant_m A\}$ образует группу.
Например, таковым являются m–Σ^0_n–полные множества.

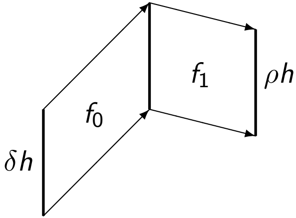
Функции с коперечислимыми графиками

Известно: График h коперечислим $\Rightarrow$ h вычислима в $\mathbf{0}'$.

Теорема (М., 2024)

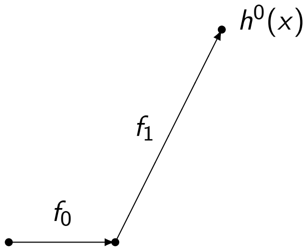
Для любой частичной $\mathbf{0}'$–вычислимой функции h существуют частичные функции f_0 и f_1 с коперечислимыми графиками такие, что

1. f_0 *инъективна*
2. $\mathrm{dom}\, f_0 = \mathrm{dom}\, h$
3. $\mathrm{range}\, f_0 = \mathrm{dom}\, f_1$, *и это множество в.п.*
4. f_0^{-1} *и* f_1 *являются ограничениями всюду определённых вычислимых функций на свои области определения (но они не обязательно частично рекурсивны!).*
5. $h = f_1 f_0$

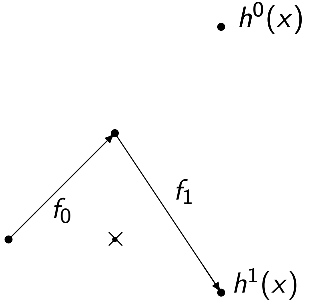


$$h = f_1 f_0$$

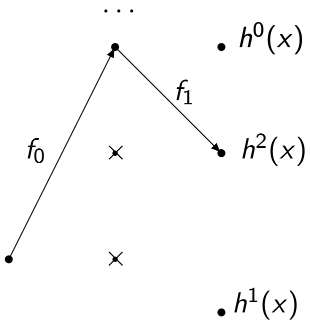
Главная идея доказательства: (нам нужно добиться, чтобы $h = f_1 f_0$)

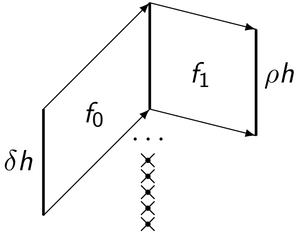


Главная идея доказательства: (нам нужно добиться, чтобы $h = f_1 f_0$)



Главная идея доказательства: (нам нужно добиться, чтобы $h = f_1 f_0$)





$$h = f_1 f_0$$

Разложение функций

Следствие

Инверсная полугруппа S всех частичных биекций из ω в ω, вычислимых относительно $\mathbf{0}'$ порождается своими элементами с ко–в.п. графиками.

Более того, каждый элемент S является произведением двух своих элементов с ко–в.п. графами.

Разложение перестановок

Негативные перестановки: перестановки на ω, графики которых ко–в.п.

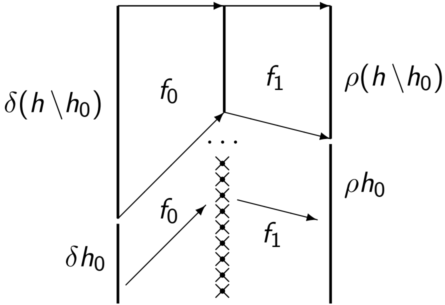
Теорема (М., 2024: достаточное условие)

Пусть h — перестановка на ω, $f \leqslant_T \mathbf{0}'$, и существует бесконечная частично рекурсивная функция h_0 со свойством $h_0 \subseteq f$. Тогда h разлагается в произведение двух негативных перестановок.

В частности, это выполнено для всех перестановок, тождественных на некотором бесконечном в.п. множестве.

Идея доказательства:

Без потери общности считаем, что δh_0 вычислима.



Ещё одно достаточное условие для разложимости:

Следствие

Предположим, что

1. $g(n,t)$ *вычислима*
2. *перестановка* f *удовлетворяет* $f(n) = \lim_{t\to\infty} g(n,t)$
3. *существует* $m < \omega$ *такое, что для всех* x *выполнено*

$$|\{t \mid g(x,t+1) \neq g(x,t)\}| \leqslant m.$$

Тогда f *разлагается в произведение двух негативных перестановок.*

Идея:

надо доказать, что f содержит бесконечную частично рекурсивную функцию. Возьмём минимальное m для которого множество

$$\{x \mid |\{t \mid g(x, t+1) \neq g(x, t)\}| = m$$

бесконечно.

Определим частично рекурсивную функцию $h(x)$ следующим образом:

ищем $t_0 < \omega$ со свойством $|\{t \leqslant t_0 \mid g(x, t+1) \neq g(x, t)\}| = m$ и полагаем $h(x) = g(x, t_0)$.

Мы видим, что h частично рекурсивна, бесконечна, и $h(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \operatorname{dom} h$.

Дальнейшие свойства:

Предложение (М., 2024)

Множество всех негативных перестановок не образует группу по композиции.

Доказательство: Нетрудно построить $\mathbf{0}'$–вычислимую не негативную перестановку, тождественную на некотором бесконечном вычислимом подмножестве ω. Она разложима в произведение двух негативных перестановок.

Дальнейшие свойства:

Предложение (М., 2024)

Множество всех негативных перестановок не образует группу по композиции.

Доказательство: Нетрудно построить $\mathbf{0}'$–вычислимую не негативную перестановку, тождественную на некотором бесконечном вычислимом подмножестве ω. Она разложима в произведение двух негативных перестановок.

Предложение (М., 2024)

Существуют негативные не вычислимые перестановки.

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущего утверждения.

Группа $G_{\mathbf{0}'}$

Теорема (М., 2024)

Группа $G_{\mathbf{0}'}$ всех $\mathbf{0}'$–вычислимых перестановок порождается негативными перестановками.

Более того, каждая $\mathbf{0}'$–вычислимая перестановка является произведением не более, чем 8 негативных перестановок.

Вопрос: Каково минимальное количество негативных перестановок в таких разложениях ?

Группа $G_{\mathbf{0}'}$

Теорема (М., 2024)

Группа $G_{\mathbf{0}'}$ всех $\mathbf{0}'$–вычислимых перестановок порождается негативными перестановками.

Более того, каждая $\mathbf{0}'$–вычислимая перестановка является произведением не более, чем 8 негативных перестановок.

Вопрос: Каково минимальное количество негативных перестановок в таких разложениях ?

Что было в докладе

- Перестановки, вычислимые в тьюринговых идеалах
- Конечно порождённые подгруппы в $\mathrm{Aut}_r(\omega)$
- Примитивно рекурсивные перестановки
- Алгоритмические сводимости и группы
- Функции с коперечислимыми графиками

Спасибо за внимание!