ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ПОПОЛНЕНИЯ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БАУМСЛАГА-СОЛИТЕРА

Романовский Н.С.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

16 июля 2024 г.

Напомним некоторые определения и факты, касающиеся жёстких групп.

Пусть в группе G имеется абелева нормальная подгруппа A. Тогда на A задаётся структура правого $\mathbb{Z}[G/A]$-модуля, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1A) + \ldots + \alpha_n(g_nA) \in \mathbb{Z}[G/A]$$

на $a \in A$ определяется формулой $a^u = (a^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (a^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $a^{g_i} = g_i^{-1}ag_i$.

Группа G называется *m-жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \ldots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и, рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$-модули, не имеют модульного кручения.

Напомним некоторые определения и факты, касающиеся жёстких групп.

Пусть в группе G имеется абелева нормальная подгруппа A. Тогда на A задаётся структура правого $\mathbb{Z}[G/A]$-модуля, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1A) + \ldots + \alpha_n(g_nA) \in \mathbb{Z}[G/A]$$

на $a \in A$ определяется формулой $a^u = (a^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (a^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $a^{g_i} = g_i^{-1}ag_i$.

Группа G называется *m-жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \ldots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и, рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$-модули, не имеют модульного кручения.

Такой ряд называется жёстким, он определяется однозначно. Ступень разрешимости m-жёсткой группы в точности равна m. Примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения. Подгруппа жёсткой группы сама является жёсткой.

Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$ частных этого кольца.

В работах автора и А.Г.Мясникова изучалась алгебраическая геометрия над жёсткими группами, а затем и теория моделей этих групп. Оказалось, что теория класса делимых m-жёстких групп похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, ω-стабильна и обладает другими хорошими свойствами.

Такой ряд называется жёстким, он определяется однозначно. Ступень разрешимости m-жёсткой группы в точности равна m. Примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения. Подгруппа жёсткой группы сама является жёсткой.

Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$ частных этого кольца.

В работах автора и А.Г.Мясникова изучалась алгебраическая геометрия над жёсткими группами, а затем и теория моделей этих групп. Оказалось, что теория класса делимых m-жёстких групп похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, ω-стабильна и обладает другими хорошими свойствами.

Такой ряд называется жёстким, он определяется однозначно. Ступень разрешимости m-жёсткой группы в точности равна m. Примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения. Подгруппа жёсткой группы сама является жёсткой.

Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$ частных этого кольца.

В работах автора и А.Г.Мясникова изучалась алгебраическая геометрия над жёсткими группами, а затем и теория моделей этих групп. Оказалось, что теория класса делимых m-жёстких групп похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, ω-стабильна и обладает другими хорошими свойствами.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал. λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность = λ-стабильность при всех λ = тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G)$ = ординал.
λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность = λ-стабильность при всех λ = тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).
Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).
Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.
Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).
Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал. λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность = λ-стабильность при всех λ = тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).
Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).
Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.
Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).
Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал. λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).
Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).
Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.
Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).
Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиперболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал. λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).
Абелева группа ω-стабильна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением делимой группы и группы ограниченного периода (Макинтайр).
Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями ω-стабильны. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.
Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас).
Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Нами было дано обобщение понятия жёсткой группы.
Пусть в группе G имеется нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы. Рассматриваем фактор G_i/G_{i+1} как модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/G_i]$.
Обозначим через R_i фактор-кольцо $\mathbb{Z}[G/G_i]$ по аннулятору G_i/G_{i+1}, так что G_i/G_{i+1} можно рассматривать как правый R_i-модуль. Группа G называется r-группой, если G_i/G_{i+1} не имеет R_i-кручения и каноническое отображение $\mathbb{Z}[G/G_i] \to R_i$ инъективно на множестве G/G_i.
Было доказано, что указанный ряд, если существует, то определяется однозначно группой G, для его членов оставляется обозначение $G_i = \rho_i(G)$. Подгруппа группы G также будет r-группой, её r-ряд получается пересечением с рядом группы и выбрасыванием повторений. Определённое выше кольцо R_i, ассоциированное с фактором G_i/G_{i+1}, является (левой и правой) областью Оре, а потому вкладывается в тело частных.

Определяются делимые r-группы.
Тем не менее в одной из работ автор написал, что не испытывает большого оптимизма по поводу перенесения основных результатов с жёстких групп на r-группы. Однако, в 2-ступенно разрешимом случае некоторый оптимизм всё же есть.

Можно задаться вопросом: какие 2-ступенно разрешимые группы (бесконечного ранга Морли) будут ω-стабильными? Есть пример Зильбера: который можно понимать как группу матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbb{C} & 1 \end{pmatrix}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где A — мультипликативная группа всех корней из 1. Имеются наши делимые 2-жёсткие группы. И пока всё. В обоих случаях доказательство ω-стабильности непростое.

Определяются делимые r-группы.
Тем не менее в одной из работ автор написал, что не испытывает большого оптимизма по поводу перенесения основных результатов с жёстких групп на r-группы. Однако, в 2-ступенно разрешимом случае некоторый оптимизм всё же есть.
Можно задаться вопросом: какие 2-ступенно разрешимые группы (бесконечного ранга Морли) будут ω-стабильными?
Есть пример Зильбера: который можно понимать как группу матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbb{C} & 1 \end{pmatrix}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где A — мультипликативная группа всех корней из 1. Имеются наши делимые 2-жёсткие группы. И пока всё. В обоих случаях доказательство ω-стабильности непростое.

Как устроена 2-ступенно разрешимая r-группа G. В ней существует нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \rho_3(G) = 1,$$

где первый фактор $A = G/\rho_2(G)$ — абелева группа и либо её порядок равен простому числу p, либо A не имеет кручения. Группа $\rho_2(G)$ представляет из себя аддитивную группу правого модуля без кручения над коммутативной областью целостности R, причём A вкладывается в группу обратимых элементов R^* и порождает R как кольцо, а действие элемента $g \in G$ на $\rho_2(G)$ сопряжением соответствует в модуле умножению на образ элемента g в A. Случай, когда A — циклическая группа порядка p не слишком интересен и мы здесь будем рассматривать класс $\mathcal{R}_2$ 2-ступенно разрешимых r-групп G для которых $G/\rho_2(G) = A$ — (абелева) группа без кручения. По условию с группой $G \in \mathcal{R}_2$ ассоциируется пара (A, R).

Группа $G \in \mathcal{R}_2$ будет *делимой*, если A — делимая абелева группа (она тогда представляется в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$), и модуль $\rho_2(G)$ является делимым R-модулем, тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных K кольца R. Пусть $\mathcal{D}_2$ обозначает класс делимых групп из $\mathcal{R}_2$. Ранее были доказаны следующие факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая группа из класса $\mathcal{R}_2$ вкладывается в делимую.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякая группа $G \in \mathcal{D}_2$ расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют рекурсивные системы аксиом в сигнатуре теории групп, определяющие каждый из классов $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{D}_2$.*

Группа $G \in \mathcal{R}_2$ будет *делимой*, если A — делимая абелева группа (она тогда представляется в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$), и модуль $\rho_2(G)$ является делимым R-модулем, тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных K кольца R. Пусть $\mathcal{D}_2$ обозначает класс делимых групп из $\mathcal{R}_2$. Ранее были доказаны следующие факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая группа из класса $\mathcal{R}_2$ вкладывается в делимую.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякая группа $G \in \mathcal{D}_2$ расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют рекурсивные системы аксиом в сигнатуре теории групп, определяющие каждый из классов $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{D}_2$.*

Разрешимая группа Баумслага-Солитера

$$\mathrm{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle \ (n > 1),$$

конечно, не является жёсткой, но принадлежит классу $\mathcal{R}_2$. Для неё $R = \mathbb{Q}_n$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями n, $A = n^{\mathbb{Z}}$ — бесконечная циклическая группа с порождающим n, сама группа отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}$.

Группа $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$ вкладывается в делимую группу

$$\mathrm{BSd}(1, n) = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix},$$

представленную матрицами над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$. О ней и будет идти речь.

Разрешимая группа Баумслага-Солитера

$$\mathrm{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle \ (n > 1),$$

конечно, не является жёсткой, но принадлежит классу $\mathcal{R}_2$. Для неё $R = \mathbb{Q}_n$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями n, $A = n^{\mathbb{Z}}$ — бесконечная циклическая группа с порождающим n, сама группа отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}$.

Группа $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$ вкладывается в делимую группу

$$\mathrm{BSd}(1, n) = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix},$$

представленную матрицами над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$. О ней и будет идти речь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если группа $G \in \mathcal{D}_2$ содержит в качестве подгруппы* $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$, *то она содержит группу* $\mathrm{BSd}(1, n)$, *которая будет наименьшей делимой подгруппой в* G, *содержащей* $\mathrm{BS}(1, n)$.

Поэтому мы можем назвать $\mathrm{BSd}(1, n)$ *делимым пополнением группы Баумслага-Солитера* $\mathrm{BS}(1, n)$. Отметим, что эта группа будет полной в терминологии теории групп, то есть в ней из любого элемента (однозначно) извлекается корень любой натуральной степени.

Последнее замечание даёт другой подход к определению группы $\mathrm{BSd}(1, n)$ не через класс $\mathcal{D}_2$. Группа Баумслага-Солитера $\mathrm{BS}(1, n)$ лежит в квазимногообразии метабелевых групп с однозначным извлечением корня.

Если в этом квазимногообразии взять какую-то минимальную полную группу, содержащую $\mathrm{BS}(1, n)$, то она равна $\mathrm{BSd}(1, n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если группа* $G \in \mathcal{D}_2$ *содержит в качестве подгруппы* $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$, *то она содержит группу* $\mathrm{BSd}(1, n)$, *которая будет наименьшей делимой подгруппой в* G, *содержащей* $\mathrm{BS}(1, n)$.

Поэтому мы можем назвать $\mathrm{BSd}(1, n)$ *делимым пополнением группы Баумслага-Солитера* $\mathrm{BS}(1, n)$. Отметим, что эта группа будет полной в терминологии теории групп, то есть в ней из любого элемента (однозначно) извлекается корень любой натуральной степени.

Последнее замечание даёт другой подход к определению группы $\mathrm{BSd}(1, n)$ не через класс $\mathcal{D}_2$. Группа Баумслага-Солитера $\mathrm{BS}(1, n)$ лежит в квазимногообразии метабелевых групп с однозначным извлечением корня.

Если в этом квазимногообразии взять какую-то минимальную полную группу, содержащую $\mathrm{BS}(1, n)$, то она равна $\mathrm{BSd}(1, n)$.

Известная теорема Г.А.Носкова утверждает, что элементарная теория конечно порождённой разрешимой группы алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда группа почти абелева. В частности, теория группы $\mathrm{BS}(1, n)$ неразрешима. Иная ситуация в случае делимого пополнения $\mathrm{BSd}(1, n)$. Ниже сформулируем полученные нами результаты, которые, правда, доказаны не для любого $n > 1$, а при условии $\circledast$: *найдётся простое число p такое,что p делит n и p^2 не делит n*. Это условие нужно для использования признака Эйзенштейна неприводимости целочисленного многочлена $x^m - n$ на полем рациональных чисел при любом m.

Изучение элементарной теории группы $\mathrm{BSd}(1, n)$ осуществляется по схеме изучения теории делимых жёстких групп, но с некоторыми различиями. Напомним, что делалось в случае жёстких групп. Сначала, исходя из определения делимой m-жёсткой группы, строилась аксиоматика класса таких групп. Затем доказывалось, что соответствующая теория полна, для этого показывалось, что ультрастепени любых двух счётных подмоделей изоморфны. На основе этого и аксиоматики получалась элементарная эквивалентность любых двух делимых m-жёстких групп и разрешимость теории. Для реализации этой схемы нам нужно первоначально догадаться, какие группы будут элементарно эквивалентны группе $\mathrm{BSd}(1, n)$.

Догадываемся. Обозначим через $\mathcal{B}_n$ класс групп $G \in \mathcal{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\mathrm{BSd}(1, n)$ и удовлетворяющих требованию: если (A, R) — ассоциированная с G пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу A как $\mathbb{Q}$-группы, тогда элементы из Y алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в R). В этой ситуации R можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом $\mathbb{Q}_n$ свободной абелевой $\mathbb{Q}$-группы с базой Y.

Группа G отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где V — некоторое векторное пространство над полем частных кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *При ограничении $\circledast$, если группа G элементарно эквивалентна группе $\mathrm{BSd}(1, n)$, то $G \in \mathcal{B}_n$.*

Собственно, из доказательства этой теоремы извлекается рекурсивная система аксиом Σ, которая определяет класс групп $\mathcal{B}_n$. Пояснение.

Догадываемся. Обозначим через $\mathcal{B}_n$ класс групп $G \in \mathcal{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\mathrm{BSd}(1, n)$ и удовлетворяющих требованию: если (A, R) — ассоциированная с G пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу A как $\mathbb{Q}$-группы, тогда элементы из Y алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в R). В этой ситуации R можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом $\mathbb{Q}_n$ свободной абелевой $\mathbb{Q}$-группы с базой Y.

Группа G отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где V — некоторое векторное пространство над полем частных кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *При ограничении $\circledast$, если группа G элементарно эквивалентна группе $\mathrm{BSd}(1, n)$, то $G \in \mathcal{B}_n$.*

Собственно, из доказательства этой теоремы извлекается рекурсивная система аксиом Σ, которая определяет класс групп $\mathcal{B}_n$. Пояснение.

ТЕОРЕМА 2. *При ограничении $\circledast$ теория $\mathcal{T}_n$ класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ, является полной и поэтому она совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$, в частности, эта теория разрешима.*

Назовём *размерностью* группы $G \in \mathcal{D}_2$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 2 выводится из следующего.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^\omega, 2^\omega)$.*

ТЕОРЕМА 2. *При ограничении $\circledast$ теория $\mathcal{T}_n$ класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ, является полной и поэтому она совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$, в частности, эта теория разрешима.*

Назовём *размерностью* группы $G \in \mathcal{D}_2$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 2 выводится из следующего.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^\omega, 2^\omega)$.*

ТЕОРЕМА 2. *При ограничении $\circledast$ теория $\mathcal{T}_n$ класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ, является полной и поэтому она совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$, в частности, эта теория разрешима.*

Назовём *размерностью* группы $G \in \mathcal{D}_2$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 2 выводится из следующего.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^\omega, 2^\omega)$.*

ТЕОРЕМА 2. *При ограничении $\circledast$ теория $\mathcal{T}_n$ класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ, является полной и поэтому она совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$, в частности, эта теория разрешима.*

Назовём *размерностью* группы $G \in \mathcal{D}_2$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Теорема 2 выводится из следующего.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^\omega, 2^\omega)$.*

Из предложений 5 и 6 вытекает, что ультрастепени по неглавному ультрафильтру на счётном множестве любых двух счётных моделей теории $\mathcal{T}_n$ изоморфны, а тогда по теореме Кейслера-Шелаха эта теория полна и совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1,n)$. Так как теория имеет рекурсивную аксиоматику, то она разрешима.

О доказательстве предложения 6. Группа G принадлежит классу $\mathcal{B}_n$, пусть (A,R) — соответствующая пара, формульная подгруппа $\rho_2(G)$ по теореме Лося равна $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$, а фактор-группа $A = G/\rho_2(G)$ равна $(H/\rho_2(H))^{\mathbb{N}/U}$. Последняя группа континуальна, поэтому первый параметр в $d(G)$ равен 2^ω. По аналогичным соображениям второй параметр $\leq 2^\omega$ и нужно доказать, что он в точности равен 2^ω.

Из предложений 5 и 6 вытекает, что ультрастепени по неглавному ультрафильтру на счётном множестве любых двух счётных моделей теории $\mathcal{T}_n$ изоморфны, а тогда по теореме Кейслера-Шелаха эта теория полна и совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$. Так как теория имеет рекурсивную аксиоматику, то она разрешима.
О доказательстве предложения 6. Группа G принадлежит классу $\mathcal{B}_n$, пусть (A, R) — соответствующая пара, формульная подгруппа $\rho_2(G)$ по теореме Лося равна $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$, а фактор-группа $A = G/\rho_2(G)$ равна $(H/\rho_2(H))^{\mathbb{N}/U}$. Последняя группа континуальна, поэтому первый параметр в $d(G)$ равен 2^ω. По аналогичным соображениям второй параметр $\leq 2^\omega$ и нужно доказать, что он в точности равен 2^ω.

Сначала разбирается основной случай, когда $H = \mathrm{BSd}(1, n)$. В этой ситуации строится континуальное множество $F = \{f_r \mid 2 \leq r \in \mathbb{R}\}$ элементов из декартовой степени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}}$, образы которых в ультрастепени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ линейно независимы над ассоциированным с группой G кольцом R, а тогда и над полем частных этого кольца. Построение и доказательство достаточно сложные и может оказаться так, что существует более простое доказательство предложения 6.

Но до стабильности мы ещё не дошли! Это будет дальше.

Проблема: будет ли ω-стабильной любая группа из класса $\mathcal{D}_2$?

Сначала разбирается основной случай, когда $H = \mathrm{BSd}(1, n)$. В этой ситуации строится континуальное множество $F = \{f_r \mid 2 \leq r \in \mathbb{R}\}$ элементов из декартовой степени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}}$, образы которых в ультрастепени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ линейно независимы над ассоциированным с группой G кольцом R, а тогда и над полем частных этого кольца. Построение и доказательство достаточно сложные и может оказаться так, что существует более простое доказательство предложения 6.

Но до стабильности мы ещё не дошли! Это будет дальше.

Проблема: будет ли ω-стабильной любая группа из класса $\mathcal{D}_2$?

Сначала разбирается основной случай, когда $H = \mathrm{BSd}(1, n)$. В этой ситуации строится континуальное множество $F = \{f_r \mid 2 \leq r \in \mathbb{R}\}$ элементов из декартовой степени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}}$, образы которых в ультрастепени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ линейно независимы над ассоциированным с группой G кольцом R, а тогда и над полем частных этого кольца. Построение и доказательство достаточно сложные и может оказаться так, что существует более простое доказательство предложения 6.

Но до стабильности мы ещё не дошли! Это будет дальше.

Проблема: будет ли ω-стабильной любая группа из класса $\mathcal{D}_2$?