О неразрешимых проблемах в нильпотентных группах

А. Трейер

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Конференция «КВМАЛ»,
посвященная памяти Виталия Анатольевича Романькова,
18 июля, 2024

Виталий Анатольевич Романьков, 1948-2023

Научные интересы

1. Теория групп
   - М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, В. А. Романьков, В. А. Чуркин, “Алгоритмические вопросы для ς-степенных групп”, Алгебра и логика, 8:6 (1969), 643–659
   - В. А. Романьков, “Теоремы вложения для нильпотентных групп”, Сиб. матем. журн., 13:4 (1972), 859–867
   - В. А. Романьков, “О вложении полициклических групп”, Матем. заметки, 14:5 (1973), 741–744
   - В. А. Романьков, “О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп”, Алгебра и логика, 21:1 (1982), 60–72
   - G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Roman’kov “Two Theorems about Equationally Noetherian Groups”, Journal of Algebra, 1998

Научные интересы

1. Теория групп
   - М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, В. А. Романьков, В. А. Чуркин, "Алгоритмические вопросы для ς-степенных групп", Алгебра и логика, 8:6 (1969), 643–659
   - В. А. Романьков, "Теоремы вложения для нильпотентных групп", Сиб. матем. журн., 13:4 (1972), 859–867
   - В. А. Романьков, "О вложении полициклических групп", Матем. заметки, 14:5 (1973), 741–744
   - В. А. Романьков, "О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп", Алгебра и логика, 21:1 (1982), 60–72
   - G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Roman'kov "Two Theorems about Equationally Noetherian Groups", Journal of Algebra, 1998
   - Romankov, V. Embedding theorems for solvable groups, Proceedings of the American Mathematical Society, 2021, 149(10), pp. 4303–4315
   - Klyachko, A.A., Mikheenko, M.A., Roman'kov, V.A. Equations over solvable groups, Journal of Algebra, 2024, 638, pp. 739–750
   - Проблема соответствия Поста для свободных групп

Соавторы

В большинстве своих работ Виталий Анатольевич единственный автор.

1. Алгебраическая криптография
   - В. А. Романьков, ‘‘Диофантова криптография на бесконечных группах’’, ПДМ, 2012, 2(16), 15–42
   - В. А. Романьков, "Введение в криптографию монография
   - В. А. Романьков, "Метод линейной декомпозиции" серия работ.

10 проблема Гильберта

10 Проблема Гильберта. Матиясевич, Davis, Putnam, Robinson

Не существует общего алгоритма, решающего уравнения над целыми числами

1. Алгоритмическая теория групп
   - В. А. Романьков, “О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах”, Алгебра и логика, 16:4 (1977), 457–471
   - В. А. Романьков, “Об универсальной теории нильпотентных групп”, Матем. заметки, 25:4 (1979), 487–495
   - В. А. Романьков, “Об уравнениях в свободных метабелевых группах”, Сиб. матем. журн., 20:3 (1979), 671–673
   - В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, “Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп”, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 21 (1983), 3–79
   - ...
   - V. A. Roman’kov, “Algorithmic theory of solvable groups”, ПДМ, 2021, 52, 16–64

1. Алгоритмическая теория групп
   - В. А. Романьков, "О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах", Алгебра и логика, 16:4 (1977), 457–471
   - В. А. Романьков, "Об универсальной теории нильпотентных групп", Матем. заметки, 25:4 (1979), 487–495
   - В. А. Романьков, "Об уравнениях в свободных метабелевых группах", Сиб. матем. журн., 20:3 (1979), 671–673
   - В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, "Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп", Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 21 (1983), 3–79
   - . . .
   - V. A. Roman'kov, "Algorithmic theory of solvable groups", ПДМ, 2021, 52, 16–64
   - В. А. Романьков, "Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени l2 достаточно большого ранга", Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 166–185
   - V. A. Roman'kov, "Undecidability of the submonoid membership problem for a sufficiently large finite direct power of the Heisenberg group", Сиб. электрон. матем. изв., 20:1 (2023), 293–305

Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени $l \geq 2$ достаточно большого ранга

В.А. Романьков

Проблема вхождения в подмоноид

Проблема вхождения в подмоноид для конечно порожденной группы G – это вопрос о существовании алгоритма, который по конечно порожденному подмоноиду M группы G и элементу $g \in G$ определяет принадлежность $g \in M$.

Вопрос

Вопрос 1 ([1, Open problem 24]; [2]). Is there a finitely generated nilpotent group with an undecidable submonoid membership problem?

1. Marcus Lohrey, The rational subset membership problem for groups: a survey, University of St Andrews, Scotland, Publisher: Cambridge University Press, 2013, P. 368-389.
2. Benjamin Steinberg, The Submonoid Membership Problem for Groups, City College CUNY Seminar, 22 June 2013, http://www.sci.ccny.cuny.edu/ benjamin/ (Encompasses joint work with Mark Kambites, Markus Lohrey, Pedro Silva and Georg Zetzsche).

Основные результаты

Теорема 1.
Существует конечно порожденный подмоноид M свободной нильпотентной группы $N_{r,2}$ достаточно большого ранга r ступени 2, для которого проблема вхождения алгоритмически неразрешима.

Следствие.
Для любого $c \geq 2$ и достаточно большого r существует конечно порожденный подмоноид M свободной нильпотентной группы $N_{r,c}$ ранга r ступени c, проблема вхождения в который алгорттмически неразрешима.

Представление результатов

Эти результаты были впервые представлены на Омском алгебраическом вебинаре 10.08.2020. На вебинаре присутствовали Маркус Лори и ряд других специалистов в данной области. Результаты также докладывались на Мальцевских чтениях 20 (пленарный доклад).

Публикации:

Короткое изложение без доказательств:
3. В.А. Романьков, Две проблемы о разрешимых и нильпотентных группах, Алгебра и логика, 59:6 (2020), 719–733.

Полное изложение:

4. В.А. Романьков, Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени $l \geq 2$ достаточно большого ранга. Известия Российской академии наук. Серия математическая, 2023, том 87, выпуск 4, страницы 166–185.

Другие результаты по данной тематике.

Достаточные условия для разрешимости проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени 2 приведены в работе

5. V.A. Roman'kov, Positive elements and sufficient conditions for solvability of the submonoid membership problem for nilpotent groups of class two, Siberian Electronic Mathematical Reports, 19:2 (2022), 387–403.

Проблема Колкомбета и др.

В [6] Т. Колкомбет и др. доказали, что проблема вхождения в подмоноид разрешима в обобщенной группе Гейзенберга $\mathbb{H}(n, \mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$, в частности, в классической группе Гейзенберга $\mathbb{H} = \mathbb{H}(3, \mathbb{Z})$, иначе говоря, группе $\mathrm{UT}(3, \mathbb{Z})$ или свободной нильпотентной группе $N_{2,2}$. Также они задали следующий вопрос:

Вопрос. (Question 2 ([6]). Does the submonoid membership problem is solvable for the class of finite direct powers of the Heisenberg group $\mathbb{H}$?

[6] T. Colcombet, J. Ouaknine, P. Semukhin, J. Worrell, On reachability problems for low dimensional matrix semigroups In: C. Baier (ed.) et al., 46th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2019), LIPIcs, 132, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fur Informatik, Dagstuhl, Germany, 2019, 44:1–44:15.

Теорема 2. [7]. Для достаточно большого n в прямой степени $\mathbb{H}^n$ существует конечно порожденный подмоноид M, проблема вхождения в который неразрешима.
Данный результат опубликован в работе

7. V.A. Roman'kov, Undecidability of the sunmonoid membership problem for sufficiently large finite direct power of the Heisenberg group, Сибирские Электронные Математические Известия, 20:1 (2023), 293–305.

Дополнительная мотивация

Проблему вхождения в подмоноид некоммутативной группы в настоящее время рассматривают как перенесение классической проблемы целочисленного линейного программирования, где фигурирует проблема вхождения в подмоноид свободной абелевой группы, на некоммутативную платформу. Возникло и развивается новое направление исследований – некоммутативная дискретная оптимизация (см. F. Bassino, I. Kapovich, M. Lohrey, A. Miasnikov, C. Nicaud, A. Nikolaev, I. Rivin, V. Shpilrain, A. Ushakov, P. Weil, Complexity and randomness in group theory. GAGTA book 1, De Gruyter, Berlin 2020, xii+374, гл. 5). При этом особое внимание уделяется классу конечно порожденных нильпотентных групп, как наиболее близкому к классу абелевых групп.

О доказательствах

Доказательство теоремы 1 основывается на неразрешимости десятой проблемы Гильберта. А именно, строится конечно порожденный подмоноид свободной нильпотентной группы ступени 2 достаточно большого ранга r, проблема вхождения в который равносильна проблемы разрешимости неразрешимого класса диофантовых уравнений. Отсюда следует существование подмоноида с аналогичным свойством в любой свободной нильпотентной группе ступени $l \geq 2$ ранга r. Аналогично доказывется теорема 2.

Базовые результаты.

Любое диофантово уравнение представимо в виде

$$D(\zeta_1, \ldots, \zeta_t) = v, v \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where D is a Diophantine polynomial with zero constant term.

Theorem

For any Diophantine equation (1), there exists a direct power $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^n$ of the Heisenberg group $\mathbb{H}$, a finitely generated submonoid M in the group $\widetilde{\mathbb{H}}$ and an element $g(v) \in \widetilde{\mathbb{H}}$ such that the equation is solvable in integers if and only if $g(v)$ belongs to M. The exponent n, the element $g(v)$, and the finite set of generators of the submonoid M are effectively determined. The submonoid M depends only on the Diophantine polynomial D on the left side (1).

Corollary

Recall that Hilbert's 10th problem is the question of the existence of an algorithm that, given a Diophantine equation determines whether it has an integer solution. Yu.V. Matiyasevich proved that such an algorithm does not exist.
The undecidability of Hilbert's 10th problem and Theorem 1 implies the following

Corollary

The submonoid membership problem in the class of finite direct powers of the Heisenberg group is undecidable.

In addition, Yu.V. Matiyasevich established that there exists a Diophantine polynomial $D_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$ with a zero constant term such that there is no algorithm that determines the solvability of equations of the form

$$D_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_t) = \upsilon, \ \upsilon \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Theorem 2

The existence of an algorithmically unsolvable equation of the form (2) with a fixed left-hand side and parameter υ allows us to establish the following stronger assertion.

Theorem

For sufficiently large $n \in \mathbb{N}$, the direct power $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^n$ of the Heisenberg group $\mathbb{H}$ contains a finitely generated submonoid M with an unsolvable membership problem.

Steps of the proof

Step 1.

Every Diophantine equation is equivalent to a non-negative Diophantine equation, i.e. an equation whose solution is sought in non-negative integers.

It is enough to replace each variable ζ_i in equation (1) with non-negative variables $\zeta_i' - \zeta_i''$.

Skolem system

Each Diophantine equation is equivalent to a system of equations of the form:

$$\zeta'\zeta'' = \zeta''', \zeta' + \zeta'' = \zeta''', \zeta' = \zeta''$$

and one equation of the form

$$\zeta' = \upsilon.$$

From a non-negative equation, one can obtain a non-negative Skolem system $\boldsymbol{S}_\upsilon$ in which the last equation has the form

$$\zeta' = |\upsilon|.$$

Skolem system

Let S_v contains e equations of the form $\zeta_i\zeta_j = \zeta_l$. Introducing new variables ζ' and making appropriate substitutions of the form ζ_i for ζ', we achieve that each variable will appear in these equations exactly once. Equations of the form $\zeta' = \zeta_i$ will be added to the S_v system. Next, we renumber the variables in such a way that all e equations of the indicated form take the form

$$\begin{gathered}\zeta_1\zeta_2 = \zeta_3, \\ \dots \\ \zeta_{3(e-1)+1}\zeta_{3(e-1)+2} = \zeta_{3e}.\end{gathered} \tag{3}$$

Skolem system

Let the system S_v contains d equations of the form $\zeta_i + \zeta_j = \zeta_l$. Similarly to the case just considered, we will ensure that among the variables of the considered set of equations there will be no variables of the previous subsystem, and each variable in their entries will appear in these equations exactly once. Next, we renumber the variables of this subsystem in such a way that all d equations of the indicated form will include only the variables $\zeta_{3e+1}, \ldots, \zeta_{3(e+d)}$, and the subsystem itself will take the form

$$\begin{gathered} \zeta_{3e+1} + \zeta_{3e+2} = \zeta_{3(e+1)}, \\ \ldots, \\ \zeta_{3(e+d-1)+1} + \zeta_{3(e+d-1)+2} = \zeta_{3(e+d)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Skolem system

Next, we write the third system, consisting of equations related to the equality of variables. Let us write all equalities of the form $\zeta_i = \zeta_j$, for pairs with different indices $i, j \leq e + d$, which follow from the set of all equalities. Moreover, it suffices to write down a subsystem in which each variable occurs exactly once. Let's renumber all the equations of this subsystem by assigning them the numbers $e + d + 1, \ldots, e + d + q$, respectively. We have the system of equations P_k:

$$\zeta_{i(k)} = \zeta_{j(k)}, \; i(k) \neq j(k), i(k), j(k) \leq 3(e+d), k = e+d+1, ..., e+d+q. \tag{5}$$

It remains to write a special equation

$$\zeta_t = |v|. \tag{6}$$

Except for the trivial equation (1) of the form $\zeta_1 = v \, (t = 1)$, the variable ζ_t is present in the system (5). Hence, $\zeta_1, \ldots, \zeta_{3e}, \zeta_{3e+1}, \ldots, \zeta_{3(e+d)}$ are all variables of the system S_v. It is obvious that the system S_v is equivalent to the new system thus replaced.

Notations

In the following lemmas, $\mathbb{H}^k$ denotes the direct product of k copies of the group $\mathbb{H}$. Denote the transvections $t_{12}, t_{23}, t_{13}^{-1}$ in the i-th copy $(i = 1, \ldots, k)$ as a_i, b_i, c_i respectively.

Lemma 1

Lemma

Let M be a submonoid of $\mathbb{H}$ generated by $g_1 = ac, b$ and $g_2 = a^{-1}$. Then any representation of b in terms of the generators of M has the form

$$b = g_1^{\zeta} b g_2^{\zeta}, \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{7}$$

The scheme of the exact location of the generators of the submonoid M when expressing the element b is as follows.

$$\left| \begin{array}{cccc} & & g_1^{\zeta} & b & g_2^{\zeta} \\ \mathbb{H}: & b = & (ac)^{\zeta} & b & a^{-\zeta} \end{array} \right|.$$

Table 1.

Lemma 2

The following lemma allows us to interpret equations of the form $\zeta + \zeta' = \zeta''$ in the group $\mathbb{H}^4$.

Lemma

Let M be a submonoid of $\mathbb{H}^4$ generated by $g_1 = a_1 c_1 c_4, g_2 = a_2 c_2 c_4, g_3 = a_3 c_3 c_4^{-1}, g_4 = a_1^{-1}, g_5 = a_2^{-1}, g_6 = a_3^{-1}$, and $f_1 = b_1 b_2 b_3$. Then the representation of b_{1-3} in terms of the generators of M has the form

$$b_{1\to 3} = g_1^{\zeta} g_2^{\zeta'} g_3^{\zeta''} f_1 g_4^{\zeta} g_5^{\zeta'} g_6^{\zeta''} \tag{8}$$

provided that $\zeta + \zeta' = \zeta''$. For given positive ζ, ζ', ζ'', the form (8) is uniquely determined up to a permutation of the factors g_i $(i = 1, 2, 3)$ on the left side and g_j $(j = 4, 5, 6)$ on the right side of the factor f_1. For null value of ζ, ζ' or ζ'', you can also assume that the corresponding generator is located as indicated.

Lemma 2: table

Let $\mathbb{H}^4 = \mathbb{H}(1) \times \ldots \times \mathbb{H}(4)$. The scheme of the exact location of the components of the generators of the submonoid M when expressing the element $b_{1\to 3}$ is as follows (empty positions correspond to trivial elements).

$$\left|\begin{array}{lccccccccc}
 & b_{1\to 3} = & g_1^{\zeta} & g_2^{\zeta'} & g_3^{\zeta''} & f_1 & g_4^{\zeta} & g_5^{\zeta'} & g_6^{\zeta''} \\
\mathbb{H}(1): & b_1 = & a_1^{\zeta} c_1^{\zeta'} & & & b_1 & a_1^{-\zeta} & & \\
\mathbb{H}(2): & b_2 = & & a_2^{\zeta'} c_2^{\zeta'} & & b_2 & & a_2^{-\zeta'} & \\
\mathbb{H}(3): & b_3 = & & & a_3^{\zeta''} c_3^{\zeta''} & b_3 & & & a_3^{-\zeta''} \\
\mathbb{H}(4): & 1 = & c_4^{\zeta} & c_4^{\zeta'} & c_4^{-\zeta''} & & & &
\end{array}\right|$$

Table 2.

Lemma 3

Lemma

Let M be a submonoid of $\mathbb{H}^6$ generated by $g_1 = a_1 c_1, g_2 = a_2 c_2, g_3 = a_1^{-1} a_3 c_3, g_4 = a_2^{-1} a_4 c_4, f_1 = b_1 b_2, f_2 = b_3 b_4, g_5 = a_3^{-1} a_5 c_5, g_6 = a_4^{-1} a_6 c_6, f_3 = b_5 b_6, g_7 = a_5^{-1}, g_8 = a_6^{-1}$. Then the representation of $b_{1-6} = b_1 \cdot \ldots \cdot b_6$ in terms of the generators of M has the form

$$b_{1-6} = g_1^{\zeta} g_2^{\zeta'} f_1 g_3^{\zeta} g_4^{\zeta'} f_2 g_5^{\zeta} g_6^{\zeta'} f_3 g_7^{\zeta} g_8^{\zeta'} . \qquad (9)$$

For given positive ζ, ζ' the form (9) is defined uniquely up to a permutation of the generators g_1, g_2 on the left side and g_3, g_4 on the right side of f_1, g_3, g_4 on the left side and g_5, g_6 on the right side of f_2, g_5, g_6 on the the left side and g_7, g_8 on the right side of f_3. For null value of ζ or ζ', you can also assume that the corresponding generator is located as indicated.

Lemma 4

The scheme of the exact location of the components of the generators of the submonoid M when expressing the element $b_{1\to6}$ is as follows (empty positions correspond to trivial elements).

$$\left|\begin{array}{lcccccccc}
 & b_{1\to6} = & g_1^{\zeta} g_2^{\zeta'} & f_1 & g_3^{\zeta} g_4^{\zeta'} & f_2 & g_5^{\zeta} g_6^{\zeta'} & f_3 & g_7^{\zeta} g_8^{\zeta'} \\
\mathbb{H}(1): & b_1 = & a_1^{\zeta} c_1^{\zeta} & b_1 & a_1^{-\zeta} & & & & \\
\mathbb{H}(2): & b_2 = & a_2^{\zeta'} c_2^{\zeta'} & b_2 & a_2^{-\zeta'} & & & & \\
\mathbb{H}(3): & b_3 = & & & a_3^{\zeta} c_3^{\zeta} & b_3 & a_3^{-\zeta} & & \\
\mathbb{H}(4): & b_4 = & & & a_4^{\zeta'} c_4^{\zeta'} & b_4 & a_4^{-\zeta'} & & \\
\mathbb{H}(5): & b_5 = & & & & & a_5^{\zeta} c_5^{\zeta} & b_5 & a_5^{-\zeta} \\
\mathbb{H}(6): & b_6 = & & & & & a_6^{\zeta'} c_6^{\zeta'} & b_6 & a_6^{-\zeta'}
\end{array}\right|.$$

Table 3.

Lemma 5

Lemma

Consider a group $\mathbb{H}^8$ in which the first 6 components form the group $\mathbb{H}^6$ from Lemma 4. Let M be a submonoid of $\mathbb{H}^8$ generated by $g_1 = a_1 c_1 a_7, g_2 = a_2 c_2, g_3 = a_1^{-1} a_3 c_3, g_4 = a_2^{-1} a_4 c_4 b_7, f_1 = b_1 b_2, f_2 = b_3 b_4, g_5 = a_3^{-1} a_5 c_5 a_7^{-1}, g_6 = a_4^{-1} a_6 c_6, f_3, g_7 = a_5^{-1}, g_8 = a_6^{-1} b_7^{-1}$ and $g_9 = a_8 c_6 c_7^{-1}, f_4 = b_8, g_{10} = a_8^{-1}$. Then the representation of $b_{1\to 6} b_8$ in terms of the generators of M has the form

$$b_{1\to 6} b_8 = g_1^{\zeta} g_2^{\zeta'} f_1 g_3^{\zeta} g_4^{\zeta'} f_2 g_5^{\zeta} g_6^{\zeta'} f_3 g_7^{\zeta} g_8^{\zeta'} g_9^{\zeta''} f_4 g_{10}^{\zeta''}. \tag{10}$$

The last three generators commute with each of the first 10 generators. For given positive ζ, ζ', ζ'' the equality $\zeta \cdot \zeta' = \zeta''$ is necessary and sufficient for the indicated occurrence of the element $b_{1\to 6} b_8$ in the submonoid M. For null value of ζ, ζ' or ζ'', you can also assume that the corresponding generator is located as indicated.

The scheme of the exact location of the components of the generators of the submonoid M when expressing the element $b_{1\to 6}b_8$ is as follows (empty positions correspond to trivial elements).

$\mathbb{H}^8 : b_{1\to 6}b_8 =$

$$
\left|
\begin{array}{lcccccccccc}
b_{1\to 6}b_8 = & g_1^{\zeta} g_2^{\zeta'} & f_1 & g_3^{\zeta} g_4^{\zeta'} & f_2 & g_5^{\zeta} g_6^{\zeta'} & f_3 & g_7^{\zeta} g_8^{\zeta'} & g_9^{\zeta''} & f_4 & g_{10}^{\zeta''} \\
\mathbb{H}(1) : b_1 = & a_1^{\zeta} c_1^{\zeta'} & b_1 & a_1^{-\zeta} & & & & & & & \\
\mathbb{H}(2) : b_2 = & a_2^{\zeta'} c_2^{\zeta'} & b_2 & a_2^{-\zeta'} & & & & & & & \\
\mathbb{H}(3) : b_3 = & & & a_3^{\zeta} c_3^{\zeta} & b_3 & a_3^{-\zeta} & & & & & \\
\mathbb{H}(4) : b_4 = & & & a_4^{\zeta'} c_4^{\zeta'} & b_4 & a_4^{-\zeta'} & & & & & \\
\mathbb{H}(5) : b_5 = & & & & & a_5^{\zeta} c_5^{\zeta} & b_5 & a_5^{-\zeta} & & & \\
\mathbb{H}(6) : b_6 = & & & & & a_6^{\zeta'} c_6^{\zeta'} & b_6 & a_6^{-\zeta'} & & & \\
\mathbb{H}(7) : 1 = & a_7^{\zeta} & & b_7^{\zeta'} & & a_7^{-\zeta} & & b_7^{-\zeta'} & c_7^{\zeta''} & & \\
\mathbb{H}(8) : b_8 = & & & & & & & & a_8^{\zeta''} c_8^{\zeta''} & b_8 & a_8^{-\zeta''}
\end{array}
\right.
$$

Table 4.

Scheme of the further proof of Theorem 1

First, a Diophantine equation (1) is taken. Then the equivalent nonnegative Skolem system $S(v)$ is constructed from this equation. The variables and equations of this system are ordered and written as specified in (3–6).

To the resulting system S_v we associate the group $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^{8e+4d+q+1}$. We construct a submonoid $M = M$ of the group $\widetilde{\mathbb{H}}$ by defining its generating elements g_i for $i = 1, \ldots, 10e, 10e+1, \ldots, 10e+6d$ and f_j for $j = 1, \ldots, 4e, 4e+1, \ldots, 4e+d$ in accordance with the lemmas 5 and 7.

Scheme

Since all the variables of the systems (3) and (5) are different, both these systems are decidable together. It remains to take into account the equalities between these variables.
Let us add to the constructed group $\mathbb{H}^{8e+4d}$ by $q+1$ factors $\bar{H}$ and get the group $\widetilde{\mathbb{H}}$, where q is the number of equations in the system (5). Let's assign to these components the numbers $8e+4d+i$ for $i=1,\ldots,q$ and $8e+4d+q+1$ relatively.

Scheme

Then for any equation P_{e+d+k} $(k = 1, \ldots, q)$ of the form $\zeta_{i(k)} = \zeta_{j(k)}$ from (5) we add some elements to the $8e + 4d + k$th component of $\widetilde{\mathbb{H}}$ as follows.
First, for each $k = 1, \ldots, q$ we find one of the generating elements g of the M submodule whose projection exponent is equal to $\zeta_{i(k)}$. Add the element $c_{8e+4d+k}$ to the component $8e + 4d + k$ of g. Then we will perform a similar operation corresponding to the exponent $\zeta_{j(k)}$. This component will be trivial in the considered product of generating elements of the submonoid M if and only if $\zeta_{i(k)} = \zeta_{j(k)}$.