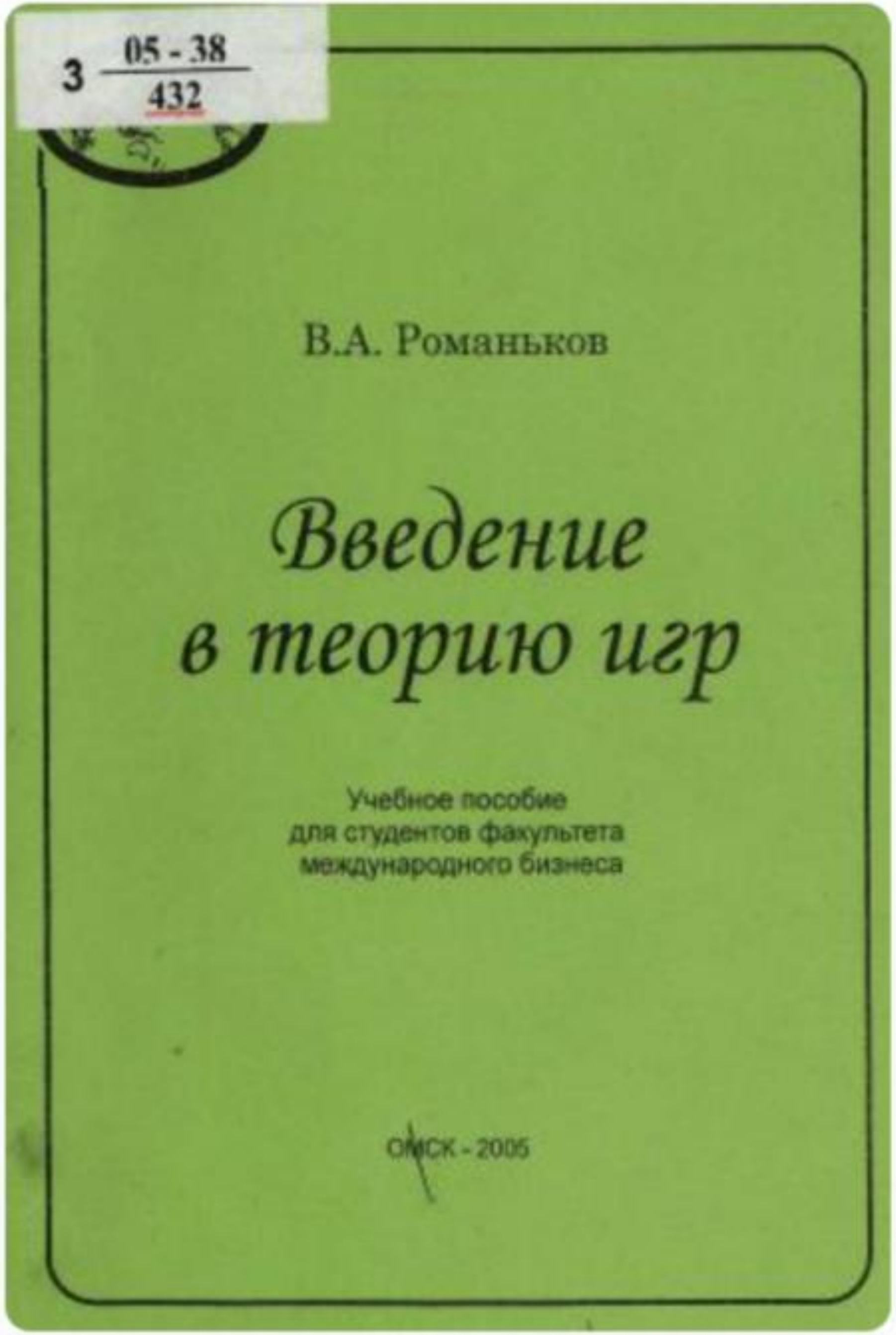
Международная конференция
**«Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики»**

# Свойства и ситуации равновесия некоторых теоретико-игровых задач

Ушакова Е.В.

15 июля - 19 июля, 2024
Омск, Россия




Романьков, В. А. Введение в теорию игр : учебное пособие для студентов факультета международного бизнеса / В. А. Романьков. – Омск : Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 2005. – 53 с. – ISBN 5-7779-0616-8.

# Непрерывные выпуклые игры

Рассмотрим непрерывную игру на некотором ограниченном замкнутом множестве.

Пусть выбор первого игрока равен проигрышу второго и определяется значением платёжной функции $H(\alpha, \beta)$.

$\alpha$ - чистая стратегия первого игрока.

$\beta$ чистая стратегия второго игрока.

Смешанные стратегии игроков обычно задаются через функции плотности вероятности: $p(\alpha)$ для первого игрока и $q(\beta)$ для второго.

Следующая теорема является непрерывным вариантом теоремы Неймана-Нэша о матричных играх.

***Теорема 1. (Основная теорема теории непрерывных игр на замкнутом пространстве)*** *Непрерывная игра на замкнутом ограниченном множестве определена в смешанных стратегиях, то есть выполнимо равенство:*

$$\max_{p(\alpha)} \min_{\beta} H_1(p(\alpha), \beta) = \min_{q(\beta)} \max_{\alpha} H_2(\alpha, q(\beta)) = c \,.$$

*Величина $c$ называется ценой игры.*

Если первый игрок использует максиминную стратегию $p(\alpha)$, при которой гарантируется средний выигрыш $c$, то второй игрок вынужден использовать свою минимаксную стратегию $q(\beta)$, если он хочет гарантировать, что в среднем не проиграет больше, чем $c$. То же самое можно сказать об игроках в обратном порядке. По этой причине максиминная и минимаксная смешанные стратегии считаются оптимальными.

Заметим, что общих методов нахождения максиминной и минимаксной смешанных стратегий не существует. Однако есть очень важный класс таких игр, в которых оптимальные стратегии эффективно определимы – это класс так называемых *выпуклых игр*.

**Теорема 2. (основная теорема о выпуклых играх)**

*Пусть функция* $H(\alpha,\beta)$ *выпукла по* $\beta$ *для любого фиксированного* $\alpha$ *(такие игры называют выпуклыми). Тогда второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию. Это значит, что существует число* $\beta$ *такое, что выполнено равенство*

$$\max_{p(\alpha)} H_1(p(\alpha),\beta) = \min_{q(\beta)} \max_{\alpha} H_2(\alpha, q(\beta)) = \min_{\beta} \max_{\alpha} H_2(\alpha,\beta) = c\,.$$

Стратегия $\beta$ второго игрока находится непосредственно. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока используются следующие соображения.

Стратегия $\alpha$ называется *существенной*, если $\min_{\beta} \max_{\alpha} H(\alpha,\beta)$ достигается при заданном значении $\alpha$ и значении $\beta_{opt}$:

1. Если $\beta_{opt} = 1$, то существует чистая оптимальная существенная стратегия $\alpha_1$ первого игрока такая, что $H'_{\beta}(\alpha_1,1) \le 0$.
2. Если $\beta_{opt} = 0$, то существует чистая оптимальная существенная стратегия $\alpha_2$ первого игрока такая, что $H'_{\beta}(\alpha_2,0) \ge 0$.
3. Если $\beta_{opt} \ne 0,1$, то существуют чистые оптимальные существенные стратегии первого игрока $\alpha_1, \alpha_2$ такие, что $H'_{\beta}(\alpha_1,1) \le 0$, $H'_{\beta}(\alpha_2,0) \ge 0$. Оптимальной стратегией первого игрока является смесь стратегий $\alpha_1, \alpha_2$ с вероятностями $p$ и $1-p$, где $p$ определяется из равенства:

$$pH'_{\beta}(\alpha_1, \beta_{opt}) + (1-p)H'_{\beta}(\alpha_2, \beta_{opt}) = 0$$

**Схема алгоритма:**

1. Проверка того, что функция $H(\alpha, \beta)$ выпукла по $\beta$.
2. Нахождение $\beta_{opt}$ из равенства

$$c = \min_{\beta} \max_{\alpha} H(\alpha, \beta)$$

3. Нахождение существенных стратегий $\alpha_1, \alpha_2$ из равенства

$$c = H(\alpha, \beta_{opt}).$$

4. Определение индексов существенных стратегий из неравенств:

$$H'_{\beta}(\alpha_1, \beta_{opt}) \leq 0, \; H'_{\beta}(\alpha_2, \beta_{opt}) \geq 0.$$

5. Вычисление $p$ из равенства

$$pH'_{\beta}(\alpha_1, \beta_{opt}) + (1-p)H'_{\beta}(\alpha_2, \beta_{opt}) = 0$$

6. Определение оптимальной стратегии первого игрока

Описанный алгоритм можно применять и в случае, если функция $H(\alpha, \beta)$ непрерывна и вогнута по $\alpha$. В этом случае первый игрок имеет чистую оптимальную стратегию, которая находится из равенства $c = H(\alpha_{opt}, \beta)$.

# Теоретико–игровой подход к решению оптимизационных задач на основное макроэкономическое тождество

Рассмотрим основное макроэкономическое тождество в динамическом виде:

$$Y_n = C_n + I_n + G_n, \; n = 1,2,... \qquad (1)$$

Предполагаем, что

$$C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = \gamma(C_n - C_{n-1}) \qquad (2)$$

Если в модели известны два значения дохода $Y_{-1}$ и $Y_0$, то при заданных значениях $G = \{G_1, G_2, \ldots G_k\}$ все остальные значения $C_n$ $I_n$ и $Y_n$ могут быть вычислены по формулам (2). Следовательно, единственным фактором управления являются наборы величин $G$ государственных расходов. При разных значениях наборов $G$ получаются разные значения доходов. Будем рассматривать период k+2 года, тогда $\{G_1, G_2, \ldots G_k\}$ - переменные управления.

Рассмотрим основное макроэкономическое тождество в динамическом виде:

$$Y_n = C_n + I_n + G_n, \; n = 1,2,... \tag{1}$$

Предполагаем, что

$$C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = \gamma(C_n - C_{n-1}) \tag{2}$$

Если в модели известны два значения дохода $Y_{-1}$ и $Y_0$, то при заданных значениях $G = \{G_1, G_2, \ldots G_k\}$ все остальные значения $C_n$ $I_n$ и $Y_n$ могут быть вычислены по формулам (2). Следовательно, единственным фактором управления являются наборы величин $G$ государственных расходов. При разных значениях наборов $G$ получаются разные значения доходов. Будем рассматривать период k+2 года, тогда $\{G_1, G_2, \ldots G_k\}$ - переменные управления.

Введём в рассмотрение переменную чистого экспорта. Тогда основное макроэкономическое тождество будет иметь вид:

$$Y_n = C_n + I_n + G_n + X_n, \; n = 1,2,... \qquad (3)$$

Добавляется еще одна переменная, еще один фактор управления.

Пусть задача решается на n лет. Переменные задачи - значения государственных расходов и значения чистого экспорта. Переменными государственных расходов можно управлять, поэтому считаем, что первый игрок выбирает стратегии $\{G_1, G_2, \ldots G_k\}$, причем делает сознательный рациональный выбор. Назовём этого игрока «человек». Переменными чистого экспорта реально управлять нельзя, поэтому выбор второго игрока $\{X_1, X_2, \ldots X_k\}$ можно считать случайным, выбором природы. «Человек» на этот выбор повлиять не может.

## Решение задачи максимизации с двумя факторами управления

Рассмотрим период времени 4 года, тогда переменными задачи будут $G_1$, $G_2$ и $X_1$, $X_2$. Параметры задачи – это два значения национального дохода $Y_{-1}$ и $Y_0$, а также коэффициенты $b$ и $\gamma$

Ограничения задачи: предполагается, что суммарная величина государственных расходов за два года ограничена единицей, то есть $G_1 + G_2 \leq 1$. Кроме того, $G_1 \geq 0$, $G_2 \geq 0$ согласно их экономическому смыслу. Значения чистого экспорта могут быть величинами как положительными, так и отрицательными, однако их сумма должна быть ограничена сверху и снизу некоторыми константами $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$. Если не накладывать это ограничение, то целевая функция может неограниченно расти или уменьшаться, что не имеет практического смысла. Итак, $K_1 \leq X_1 + X_2 \leq K_2$.

$$
\begin{cases}
Y_1 + Y_2 \to \max \\
Y_1 = bY_0 + b\gamma(Y_0 - Y_{-1}) + G_1 + X \\
Y_2 = b(1+\gamma)Y_1 - b\gamma Y_0 + G_2 + X_2 \\
G_1 + G_2 \le 1 \\
K_1 \le X_1 + X_2 \le K_2
\end{cases}
$$

Запишем целевую функцию с учетом ограничений:

$$
\begin{aligned}
& Y_1 + Y_2 = Y_1 + b(1+\gamma)Y_1 - b\gamma Y_0 + G_2 + X_2 = \\
& (1 + b(1+\gamma))(b(1+\gamma)Y_0 - b\gamma Y_{-1} + G_1 + X_1) - b\gamma Y_0 + G_2 + X_2 = \\
& (1 + b(1+\gamma))b(1+\gamma)Y_0 - b\gamma Y_0 - b\gamma(1 + b(1+\gamma))Y_{-1} + (1 + b(1+\gamma))X_1 + X_2
\end{aligned}
$$

Вначале вычислим:

$$\max_{G_1, G_2} H(G,X) = \max_{0 \le G_1 + G_2 \le 1} (c_1 Y_0 + c_2 Y_{-1} + (1 + b(1+\gamma))G_1 + G_2 + (1 + b(1+\gamma))X_1 + X_2).$$

Если $1 + b(1+\gamma) \ge 1$, то есть $b(1+\gamma) \ge 0$, то есть $\gamma \ge -1$, то с учетом ограничения $0 \le G_1 + G_2 \le 1$ оптимальное $G = (G_1, G_2) = (1{,}0)$. Если же $1 + b(1+\gamma) < 1$, то есть $\gamma < -1$, то оптимальное $G = (G_1, G_2) = (0{,}1)$. Можно записать :

$$\max_{G_1, G_2} H(G,X) = \begin{cases} c_1 Y_0 + c_2 Y_{-1} + 1 + b(1+\gamma) + (1 + b(1+\gamma))X_1 + X_2, \gamma \ge -1 \\ c_1 Y_0 + c_2 Y_{-1} + 1 + (1 + b(1+\gamma))X_1 + X_2, \gamma < -1 \end{cases},$$

Теперь вычислим $\min_{X_1,X_2}\max_{G_1,G_2} H(G,X)$, учитывая, что $K_1 \le X_1 + X_2 \le K_2$. Если $1+b(1+\gamma)\ge 1$, то есть $b(1+\gamma)\ge 0$, то есть $\gamma \ge -1$, то оптимальная стратегия второго игрока $X=(X_1,X_2)=(K_1,0)$. Если же $1+b(1+\gamma)<1$, то есть $\gamma<-1$, то оптимальная стратегия второго игрока $X=(X_1,X_2)=(0,K_1)$. Таким образом, получаем цену игры:

$$c=\min_{X_1,X_2}\max_{G_1,G_2} H(G,X)=\begin{cases} c_1Y_0+c_2Y_{-1}+1+b(1+\gamma)+(1+b(1+\gamma))K_1, \gamma\ge -1 \\ c_1Y_0+c_2Y_{-1}+1+K_1, \gamma<-1 \end{cases},$$

и $X_{opt}=\begin{cases} (K_1,0), \gamma\ge -1 \\ (0,K_1), \gamma<-1 \end{cases}.$

**Задача стабилизации национального дохода (состоит в максимизации наименьшего возможного национального дохода)**

$$
\begin{cases}
\min\{Y_1, Y_2\} \to \max \\
G_1 + G_2 = 1, \\
G_1 \ge 0, \\
G_2 \ge 0, \\
X_1 + X_2 = 2, \\
-1 \le X_1 \le 6, \\
Y_1 = 3X_1 + G_1 - 1, \\
Y_2 = X_2 + 3G_2 - 1
\end{cases}
$$

Ответ: $G_{opt} = \frac{1}{2}$, $X_{opt} = 1$, цена игры $-3\frac{1}{2}$.

# ЗАДАЧА О ЛИНЕЙНОМ РАЗМЕЩЕНИИ

В монографии Мулена рассматривается задача о размещении объектов на прямой линии, которой можно придать следующую формулировку:

- На одной улице должно быть размещено 2n магазинов. Владельца магазина дешевых товаров назовём вторым игроком, а дорогих – первым игроком.
- Если магазины расположены близко друг от друга, то покупатели зачастую предпочитают приобрести дешевый товар.
- Второй игрок стремится разместить свои магазины как можно ближе к магазинам первого игрока, а тот старается по возможности увеличить расстояние между магазинами.

**Цель исследования**: разработать метод решения задачи о размещении в случае n>1.

- Задачи:
- Разработать метод решения для n=2;
- Разработать метод решения для n=3.

- Дана новая формулировка задачи о размещении;
- Разработан метод решения задачи о размещении для $n=2$;
- Разработан метод решения задачи о размещении для $n=3$.

- ***Лемма 1.*** *Существует взаимно-однозначное соответствие между выбором n точек на отрезке [0,1] и выбором одной точки внутри правильного n-симплекса, в котором сумма расстояний от произвольной точки до граней симплекса равна единице.*

Математическая модель задачи о размещении приобретает следующую формулировку:

Два игрока выбирают по n точек на отрезке $I=[0,1]$:

1-й игрок: $0<x_1,\dots,x_n<1$,

2-й игрок: $0<y_1,\dots,y_n<1$.

Первый игрок стремится увеличить расстояние между своими точками и точками противника, а второй игрок стремится его уменьшить. Каждому выбору точек на отрезке $I=[0,1]$ ставим в соответствие одну точку внутри правильного n-симплекса $P(h_0,\dots,h_n)$, где $h_i=x_{i+1}-x_i$, в котором сумма расстояний от произвольной точки до его граней постоянна и равна единице.

Платёжная функция – это выигрыш первого игрока, равный проигрышу второго. Платёжная функция  в данной игре – это квадрат расстояния между точками в симплексе. Требуется найти оптимальное решение и цену игры.

# Задача о размещении в случае n=2

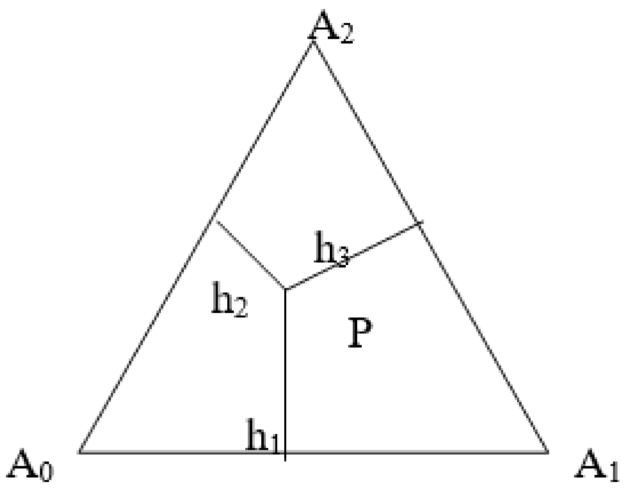
Сформулируем задачу о размещении для случая n=2: два игрока выбирают по 2 точки на отрезке $I=[0,1]$:

1-й игрок: $0<x_1,x_2<1$,

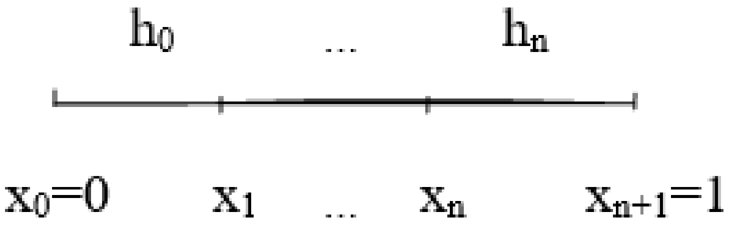
2-й игрок: $0<y_1,y_2<1$.

Первый игрок стремится увеличить расстояние между своими точками и точками противника, а второй игрок стремится его уменьшить. Каждому выбору точек на отрезке $I=[0,1]$ ставим в соответствие одну точку внутри правильного 2-симплекса $P(h_0,h_1,h_2)$, где $h_i=x_{i+1}-x_i$ (согласно Лемме 1.).

В данном случае это равносторонний треугольник с высотой равной единице:




Платёжная функция – это выигрыш первого игрока, равный проигрышу второго. Платёжная функция  в данной игре – это квадрат расстояния между точками в симплексе. Требуется найти оптимальное решение и цену игры.



$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{3}(2(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2))^2 - (x_2 - y_2)^2 .$$

- Доказано, что платёжная функция строго выпукла по второй паре переменных, следовательно, основной теоремой о выпуклых играх второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию.

***Теорема1. (Оптимальная чистая стратегия второго игрока).***

*Оптимальной чистой стратегией второго игрока является выбор точки* $\widetilde{Q} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)$ *- центра треугольника.*

# Задача о размещении в случае n=3

Сформулируем задачу о размещении для случая n=3: два игрока выбирают по 3 точки на отрезке $I=[0,1]$:

1-й игрок: $0<x_1,x_2,x_3<1$,

2-й игрок: $0<y_1,y_2,y_3<1$.

Первый игрок стремится увеличить расстояние между своими точками и точками противника, а второй игрок стремится его уменьшить. Каждому выбору точек на отрезке $I=[0,1]$ ставим в соответствие одну точку внутри правильного 3-симплекса $P(h_0,h_1,h_2,h_3)$, где (согласно Лемме 1.) $h_i=x_{i+1}-x_i$. В данном случае это тетраэдр $T_3$, высота которого равна единице.

В качестве платёжной функции выбираем квадрат расстояния между этими точками.

$$H(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{8}(4(x_1 - y_1) + 3(x_2 - y_2) + 3(x_3 - y_3))^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}((x_3 - y_3) - (x_2 - y_2))^2 + (x_1 - y_1)^2$$

- Доказано, что платёжная функция строго выпукла по второй паре переменных, следовательно, основной теоремой о выпуклых играх второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию

***Теорема 2. (Оптимальная чистая стратегия второго игрока).***

*Оптимальной чистой стратегией второго игрока является выбор точки* $\widetilde{Q}=(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3)$ - *центра тетраэдра.*

# Дискретно-выпуклая матричная игра

**Целью исследования** является определение класса матричных игр, для которых применимы методы теории непрерывных выпуклых игр.

**Задачи**:

- Дать определение дискретно-выпуклой матричной игры.
- Разработать алгоритм перехода от дискретно-выпуклой матричной игры к непрерывной выпуклой игре на квадрате.

**Научная новизна**:

- Введено понятие дискретно-выпуклой матричной игры.
- Описан алгоритм трансформации дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной игры на квадрате.
- Доказана основная теорема дискретно-выпуклых игр.

- Апробация:

1) «Дискретно-выпуклые матричные игры»(научный доклад)

Обозрение прикладной и промышленной математики. Седьмая Международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике» научные доклады. Часть 3. Москва, 2009

2) «Дискретно-выпуклые матричные игры» (тезисы)

4 Всероссийчкая конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» Материалы конференции. Омск, 2009

3) «Дискретно-выпуклая матричная игра» (статья) Вестник Омского университета №4 (70), 2013

***Определение 1***. Набор вещественных чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ называется дискретно-выпуклым, если кусочно-линейная функция $f$, для которой вершинами звеньев служат точки графика: $f(x_i) = a_i$ для $i = 1, \ldots, k$ при некотором выборе точек $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_k = 1$ является выпуклой.

Легко видеть, что определение не зависит от выбора точек $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_k = 1$. Аналитически данное свойство означает, что для любого $0 < \lambda < 1$, для любых $1 \le i < j \le n$ выполнены неравенства:

$$f((1-\lambda)x_i + \lambda x_j) \le (1-\lambda)f(x_i) + \lambda f(x_j).$$

***Определение 2.*** Матричная игра с матрицей платежей (выигрышей первого игрока) $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ называется дискретно-выпуклой, если любая её строка $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ($i = 1, \ldots, m$) является дискретно-выпуклой.

# Алгоритм трансформации дискретно-выпуклой матричной игры до непрерывной выпуклой игры на квадрате

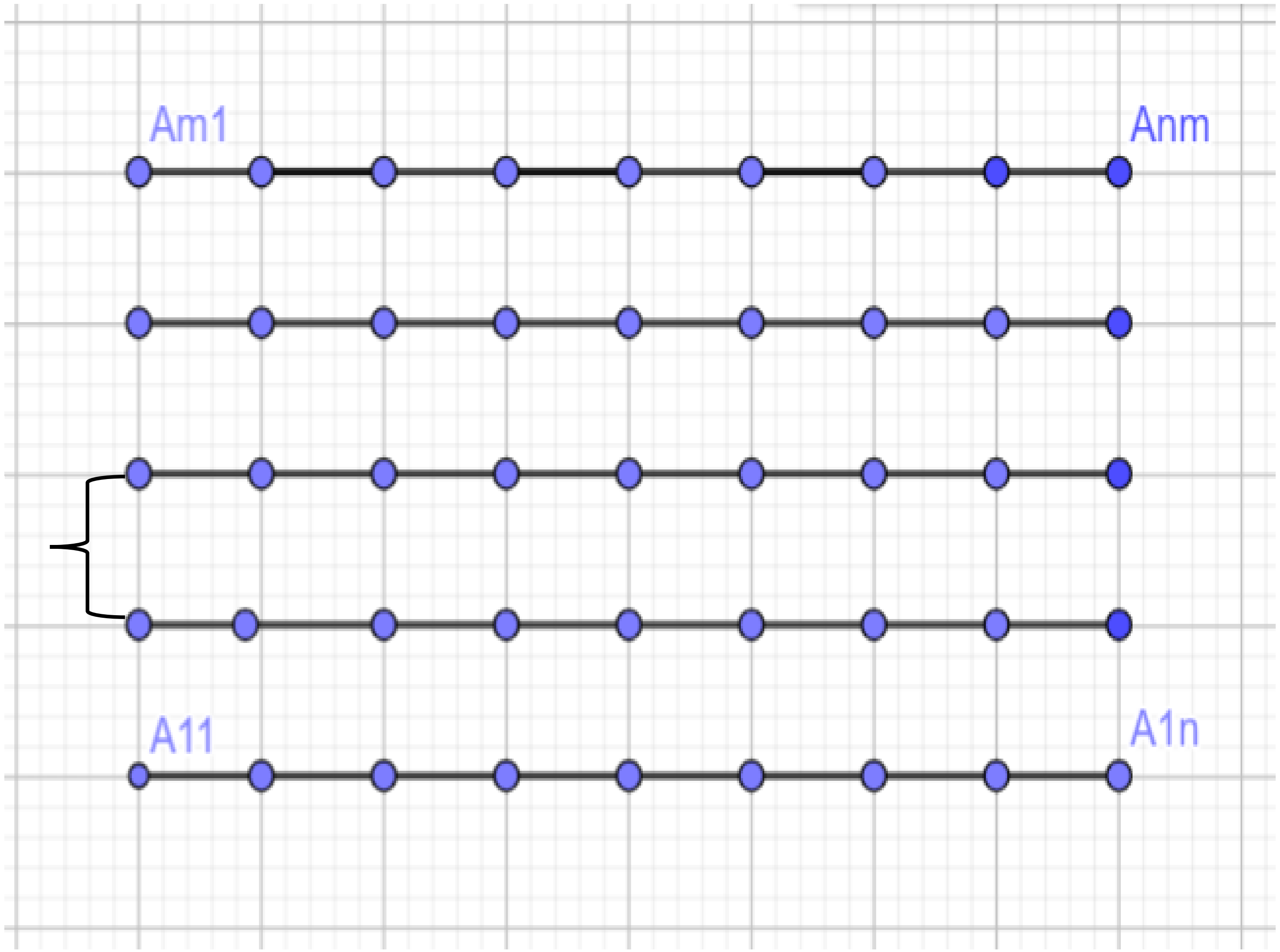
1. Преобразуем матрицу в единичный квадрат :

$$K = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

   1. Считаем, что строки матрицы пронумерованы снизу вверх.
   2. Нижнее ребро квадрата соответствует первой строке матрицы.
   3. Верхнее ребро соответствует последней строке матрицы.
   4. Остальные рёбра располагаются по квадрату с одинаковым интервалом:

$$\delta = \frac{1}{(m-1)}$$

$$\delta = \frac{1}{(m-1)}$$



2. На каждом таком ребре определяем функцию выигрышей первого игрока как кусочно-линейную функцию, отвечающую определённой строке матрицы:

$$H(x_1, \delta \cdot (j-1)) = a_{j1}$$

…

$$H(x_n, \delta \cdot (j-1)) = a_{jn}$$

$$j = 1, \ldots, m$$

При:

$$x_i \le x \le x_{i+1},$$

Полагаем:

$$\lambda = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Определяем:

$$H(x, \delta \cdot (j-1)) = (1-\lambda) a_{ji} + \lambda a_{ji+1}$$

$$j = 1, \ldots, m$$

***Лемма 1.*** Пусть заданы функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, а интервале$0 \leq x \leq 1$, которые непрерывны и выпуклы по $x$. Тогда функция

$$g(\mathrm{x}, \mu) = \mu f_1(x) + (1 - \mu) f_2(x)$$

непрерывна и выпукла по $x$ на квадрате $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

3. Считая, что $\delta(j-1) \leq \mu \leq \delta j$, строим по Лемме 1 для каждой пары функций:

$$f_1(x) = H(x, \delta(j-1)), f_2 = H(x, \delta(j)), j = 1, \dots, \mathrm{m}-1,$$

- выпуклые по $x$ функции и значения $H(x, \mu)$,

объединяя области значений которых, получаем выпуклую по $x$ функцию $H(x, y)$ на $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Далее мы сопоставляем исходной дискретно-выпуклой матричной игре с матрицей $A = (a_{ij})$ непрерывную выпуклую игру на квадрате $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ с платёжной функцией $H(x, y)$.

Непрерывные выпуклые игры на квадрате допускают эффективное нахождение оптимальных стратегий игроков.

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока вычисляется функция $\max_{y} H(x, y) = h(x)$ , а затем вычисляется $\min_{x} h(x, y) = C$, что является ценой игры. Существует оптимальная чистая стратегия первого игрока $x_{opt}$, для которой $\max_{y} H\left(x_{opt}, y\right) = C$ .

Оптимальной стратегией второго игрока служит вероятностная смесь двух чистых стратегий $x_{opt1}$ и $x_{opt2}$, которые берутся с вероятностями $p$ и $1 - p$, соответственно.

***Теорема (Основная теорема теории дискретно-выпуклых игр).*** Цена дискретно-выпуклой матричной игры с матрицей $A = (a_{ij})$ равна цене соответствующей непрерывной выпуклой игры на квадрате $K = \{(x, y)\colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ с платёжной функцией $H(x, y)$, построенной в соответствии с изложенным алгоритмом . Первый игрок имеет либо оптимальную чистую стратегию $x_{opt}$, либо смесь двух чистых стратегий $x_{opt1}$ и $x_{opt2}$, которые берутся с вероятностями $p$ и $1 - p$, соответственно. В частности, дискретно-выпуклая матричная игра эквивалентна игре с подматрицей матрицы $A = (a_{ij})$ размера m×2. Оптимальная смешанная стратегия первого игрока, сводящаяся к вычислению $p$ и $1 - p$, может быть найдена графическим методом.

Спасибо за внимание!