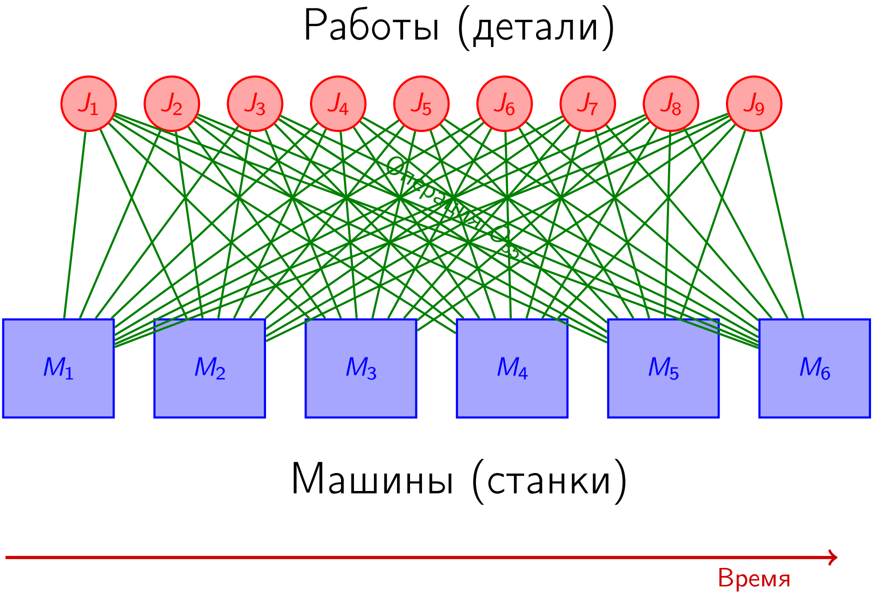
О комбинаторных методах решения одной цеховой задачи составления расписаний открытого типа

Ю.В. Захарова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015

Постановка задачи Open Shop



Задача open shop (цеховая задача открытого типа)

Ограничение

Операции каждой работы могут выполняться в произвольном порядке. Операции одной машины (как и операции одной работы) не могут выполняться одновременно.

Цель

Построить допустимое расписание минимальной длины (C_{max}).

Пример содержательной постановки

Диспансеризация. Группе пациентов (работы) требуется пройти осмотр у множества специалистов (машины). Время приема каждого пациента каждым специалистом известно заранее. Требуется составить расписание, в котором минимизируется время окончания последнего приема. Задержками при переходе пациентов из одного кабинета в другой можно пренебречь.

Пять алгоритмов для задачи с двумя машинами

Нижняя оценка

- ℓ_i — сумма длительностей операций, выполняемых машиной M_i (нагрузка M_i),
- d_j — сумма длительностей операций работы J_j (длина J_j).

$$\bar{C} = \max\left\{\max_i \ell_i, \max_j d_j\right\}.$$

Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

Длина оптимального расписания для любого примера задачи open shop с двумя машинами и матрицей длительностей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Алгоритм Гонзалеза, Сани (1976)
Алгоритм Пинедо, Шраге (1982)
Алгоритм де Верра (1989)
Алгоритм Сопера (2015)
Алгоритм Храмовой (2021)

Gonzalez, Sahni 1976

Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

Длина оптимального расписания для любого примера задачи open shop с двумя машинами и матрицей длительностей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Алгоритм Гонзалеза-Сани (1976)

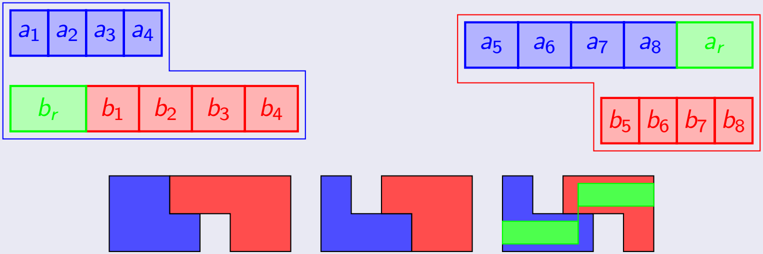
1. Разделим все работы на два множества:
$$A = \{j | a_j \leqslant b_j\},\ B = \{j | a_j > b_j\}.$$
2. Выберем “диагональную” работу r такую, что
$$r = \arg\max_j (\min\{a_j, b_j\}).$$
3. Пусть $r \in A$. Первая машина выполняет операции в порядке $(A \setminus \{r\}) \to B \to r$, вторая начинает с r, потом продолжает в том же порядке, что первая. Все работы, кроме диагональной, выполняются сначала на первой машине, потом на второй.

Gonzalez, Sahni 1976

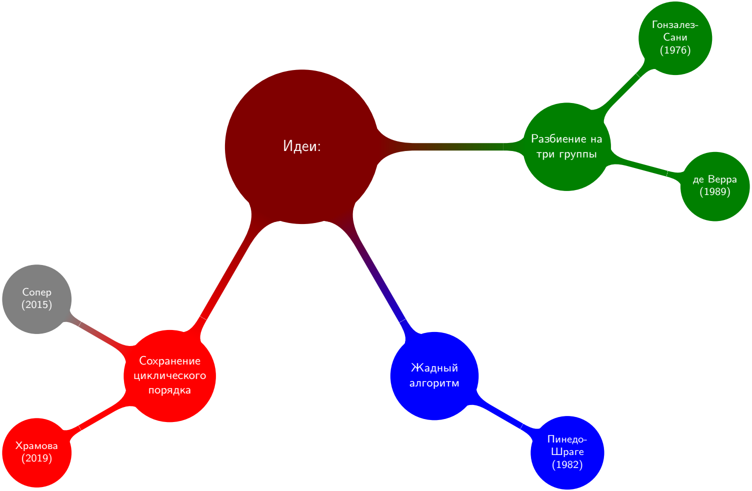
Теорема (Gonzalez, Sahni 1976)

Длина оптимального расписания для любого примера задачи open shop с двумя машинами и матрицей длительностей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ совпадает со стандартной нижней оценкой $\bar{C}$.

Иллюстрация к алгоритму Гонзалеза-Сани



Идеи алгоритмов



Вдохновляющие статьи

- Jurisch B., Kubiak W. Two machine open shop with renewable resources (1995)
- Bampis E., Letsios D., Lucarelli G. A note on multiprocessor speed scaling with precedence constraints (2014)
- Benoit A., Canon L. C., Elghazi R., and Heam P. C. List and shelf schedules for independent parallel tasks to minimize the energy consumption with discrete or continuous speed (2023)
- Ji M., Yao D.L., Ge J.J., Chen, T.C.E. Single-machine slack duewindow assignment and scheduling with past-sequence-dependent delivery times and controllable job processing times. (2015, электротехника, схемотехника, обработка металла)

$$p_j(R_j) = \left(\frac{Ch_j}{R_j}\right)^{\kappa},$$

где $0 < \kappa < 1$ – заданная константа, Ch_j – характеристика объема работы $j \in J$, R_j – объем ресурса, потребляемый работой $j \in J$.

Возобновимый ресурс

Данные по ресурсам

R_{ij} – объем ресурса, потребляемый операцией O_{ji} в каждый момент времени ее выполнения; S – доступный объем ресурса в каждый момент времени.

Точное решение, $O(n^3)$ [Jurisch, Kubiak 1995]

Три этапа: решение задачи о максимальном потоке $\rightarrow$ расписание с прерываниями $\rightarrow$ расписание без прерываний той же длины.

NP-трудность [Jurisch, Kubiak 1995]

Задача open shop с двумя возобновимыми ресурсами NP-трудна в обычном смысле.

Энергия как ресурс

Скорость

Если операция O_{ji} выполняется со скоростью s_{ji}, то потребление энергии в еденицу времени составляет s_{ji}^{α} ($\alpha > 1$ – константа)

Динамическая составляющая

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha}$$

Статическая составляющая

$$m \cdot P_{stat} \cdot C_{\max}$$

Две машины и энергия

Выпуклая модель ($m = 2$)

$$LB \to \min, \tag{1}$$

$$LB \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \ \ i = 1, \ 2, \tag{2}$$

$$LB \geq p_{1j} + p_{2j}, \ \ j \in J, \tag{3}$$

$$E \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} \left(\frac{W_{ij}}{p_{ij}} \right)^{\alpha} + 2 \cdot P_{stat} \cdot C_{\max}, \tag{4}$$

$$p_{ij} \geq 0, \ \ j \in J, \ \ i = 1, \ 2. \tag{5}$$

Расписание ($m = 2$)

Любой из пяти алгоритмов дадут решение, на котором достигается нижняя оценка.

Задача с предписаниями работ (операций)

- $\mathcal{J}$, $|\mathcal{J}| = n$, – множество работ.
- $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}| = m$, – множество машин.
- p_{vj} – длительность операции v работы j.
- $K_l = \{1, \dots, k_l\}$ – множество позиций машины l.
- Предписания работ: $X^{i,l}$ – множество работ (операций), которые могут выполняться в позиции $i \in K_l$ машины l.
- Цель – назначить работы (или операции) в позиции машин так, чтобы критерий принимал минимальное значение.

Мотивация

Технологические ограничения

Технологические ограничения в производсвенных и многопроцессорных компьютерных системах, где порядок работ обуславливается переналадкой оборудования, фиксированными маршрутами, структурными ограничениями и другими факторами.

Оптимальная рекомбинация в эволюционных алгоритмах

Дано два родительских решения – перестановки работ $\pi^1 = (\pi^1_1, \dots, \pi^1_n)$ и $\pi^2 = (\pi^2_1, \dots, \pi^2_n)$. Требуется найти перестановку-потомка $\pi' = (\pi'_1, \dots, \pi'_n)$, такую что

(I) $\pi'_i = \pi^1_i$ or $\pi'_i = \pi^2_i$ для всех $i = 1, \dots, n$;

(II) π' имеет минимальное значение целевой функции среди всех перестановок, удовлетворяющих условию (I).

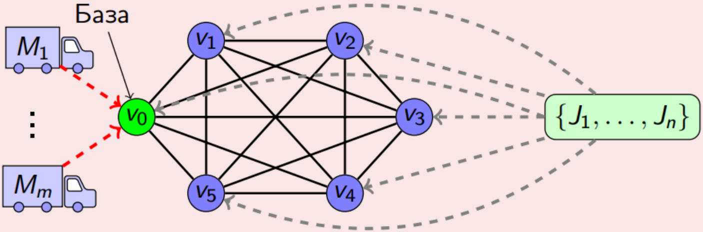
Тогда работы π^1_i и π^2_i образуют предписание $X^{i,1}$ для позиции i машины.

Мотивация

Технологические ограничения

Технологические ограничения в производственных и многопроцессорных компьютерных системах, где порядок работ обуславливается переналадкой оборудования, фиксированными маршрутами, структурными ограничениями и другими факторами.

Расписание и маршрутизация



Предыдущие исследования

Задачи составления расписаний

- Serdyukov A.I.: On travelling salesman problem with prohibitions, Upravlaemye systemi (1978)
- Eremeev A., Kovalenko Yu.: A memetic algorithm with optimal recombination for the asymmetric travelling salesman problem, Memetic Computing (2020)
- Chernykh I., Kononov A., Sevastyanov S.: Efficient approximation algorithms for the routing open shop problem, Computers and Operations Research (2013)

Другие задачи

- Yagiura M., Ibaraki T.: The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems, Eur. Jour. Oper. Res. (1996)
- Balas E., Niehaus W.: Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems, Journ. Heur. (1998)
- Chicano F., Ochoa G., Whitley D., Tinos R.: Quasi-optimal recombination operator, LNCS (2019)

NP-трудность

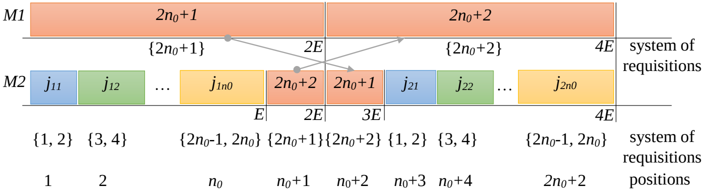
Упорядоченное 2-Разбиение

Дано упорядоченное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n_0}\}$ и вес e_i каждого элемента $a_i \in A$, такой что $\sum_{a_i \in A} e_i = 2E$ и $e_i < e_{i+1},\ \ i = 1, \ldots, 2n_0 - 1$.

Требуется определить, можно ли множество A разбить на два подмножества A_1 и A_2, таких что

$$\sum_{a_i \in A_1} e_i = \sum_{a_i \in A_2} e_i = E,\ |A_1| = |A_2| = n_0,$$

и подмножество A_1 содержит только один элемент из каждой пары $a_{2i-1},\ \ a_{2i},\ \ i = 1, \ldots, n_0$.



Подход к решению, $|X^i| \le 2$

Основная идея

- $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$ – двудольный граф.
- $\bar{U} = \{\{i, x\} : i \in X_n,\ x \in X^i\}$ – множество ребер.
- Вершины левой части $\leftrightarrow$ позиции.
- Вершины правой части $\leftrightarrow$ работы.
- Существует взаимооднозначное соответствие между множеством совершенных паросочетаний $\mathcal{W}$ в $\bar{G}$ и множеством Π допустимых перестановок задачи $I(\gamma,\ X^i)$[a].

[a] Сердюков А.И. (1978); Eremeev A., Kovalenko Yu. (2017)

Типы ребер

- Ребро $\{i, x\} \in \bar{U}$ называется *особым*, если $\{i, x\}$ принадлежит всем совершенным паросочетаниям графа $\bar{G}$.
- Все ребра, кроме особых и смежных с ними, разбиваются на циклы.

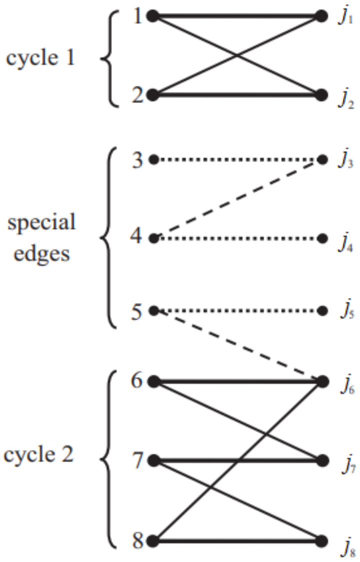
Алгоритм решения $I(\gamma, X^i)$

Шаг 1. Построить граф $\bar{G}$, идентифицировать особые ребра и циклы, найти максимальные паросочетания в циклах.
Шаг 2. Перебирать все совершенные паросочетания $W \in \mathcal{W}$ графа $\bar{G}$ комбинацией максимальных паросочетаний в циклах и особых ребер.
Шаг 3. Построить соответствующее решение $\pi \in \Pi$ для каждого $W \in \mathcal{W}$ и вычислить $\gamma(\pi)$.
Шаг 4. Вернуть в качестве результата $\pi^* \in \Pi$, такую что $\gamma(\pi^*) = \min_{\pi \in \Pi} \gamma(\pi)$.

Вычислительная сложность

$O(T(\gamma)2^{q(I)})$, где $q(I) = q(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и последнее неравество достижимо, $T(\gamma)$ – время вычисления функции γ.

Пример



«Почти все» индивидуальные задачи

Граф $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$ называется «хорошим», если выполняется неравенство $q(\bar{G}) \leq 1.1 \ln n$.

$\bar{\chi}_n$ – множество «хороших» графов $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$.

χ_n – множество всех графов $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$.

$\frac{|\bar{\chi}_n|}{|\chi_n|} \to 1$ при $n \to \infty$ (Сердюков А.И., 1978).

Теорема

«Почти все» системы предписаний работ с $|X^i| \leq 2,\ i = 1, \ldots, n$, приводят к индивидуальным задачам $I(\gamma,\ X^i)$, имеющим не более n допустимых решений и разрешимым за время $O(nT(\gamma))$.

Вопрос 1

NP-трудность при расписаниях без простоев.

Вопрос 2

Полиномиальные приближенные алгоримы, где оценка строится относительно нижней границы, задаваемой линейными или выпуклыми функциями. Обобщение алгоритмом при проивольных длительностях операций.

Спасибо за внимание!

***

Благодарю Черных И.Д. и Кононова А.В. за полезные обсуждения.