Об интегрируемости уравнений субримановых геодезических на группе Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$ и их качественном поведении

Зубарева И.А., Никоноров Ю.Г.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал;
Южный математический институт Владикавказского начного центра РАН

Международная научная конференция
"Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики",
посвященная памяти Виталия Анатольевича Романькова

Омск, 16–19 июля 2024

1. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. (А)нормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на группе Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$ // Вестник ОмГУ, 2023. Т. 28, No. 5. С. 26–38.

2. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, No. 3. С. 481–501.

$$G_{2,1} \times G_{2,1} = \left\{ h = \begin{pmatrix} e^{-x} & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $2\mathfrak{g}_{2,1}$ группы Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[E_1, E_2] = E_1, \quad [E_3, E_4] = E_3.$$

1. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. (А)нормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на группе Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$ // Вестник ОмГУ, 2023. Т. 28, No. 5. С. 26–38.

2. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, No. 3. С. 481–501.

$$G_{2,1} \times G_{2,1} = \left\{ h = \begin{pmatrix} e^{-x} & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-z} & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $2\mathfrak{g}_{2,1}$ группы Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[E_1, E_2] = E_1, \quad [E_3, E_4] = E_3.$$

Предложение 1.

Существует единственное с точностью до автоморфизма алгебры Ли $(2\mathfrak{g}_{2,1}, [\cdot,\cdot])$ двумерное подпространство $\mathfrak{p} \subset 2\mathfrak{g}_{2,1}$, порождающее алгебру $2\mathfrak{g}_{2,1}$ посредством $[\cdot,\cdot]$.

Пусть

$$e_1 = E_1 + E_2 + E_3, \quad e_2 = E_2 + E_4,$$
$$e_3 := [e_1, e_2] = E_1 + E_3, \quad e_4 := [e_1, e_3] = -E_1.$$

Двумерное подпространство $\mathfrak{p} = \operatorname{span}(e_1, e_2)$ порождает $2\mathfrak{g}_{2,1}$. Кроме того,

$$[e_2, e_3] = -e_3, \quad [e_1, e_4] = [e_2, e_4] = -e_4, \quad [e_3, e_4] = 0.$$

Субриманово расстояние между g_0, g_1:

$$d(g_0, g_1) = \inf \int_0^T \sqrt{(dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)), dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)))}\,dt,$$

$g = g(t)$, $0 \le t \le T$, $dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)) \in \mathfrak{p}$ и $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$; T не фиксировано.

Предложение 1.

Существует единственное с точностью до автоморфизма алгебры Ли $(2\mathfrak{g}_{2,1}, [\cdot,\cdot])$ двумерное подпространство $\mathfrak{p} \subset 2\mathfrak{g}_{2,1}$, порождающее алгебру $2\mathfrak{g}_{2,1}$ посредством $[\cdot,\cdot]$.

Пусть

$$e_1 = E_1 + E_2 + E_3, \quad e_2 = E_2 + E_4,$$
$$e_3 := [e_1, e_2] = E_1 + E_3, \quad e_4 := [e_1, e_3] = -E_1.$$

Двумерное подпространство $\mathfrak{p} = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ порождает $2\mathfrak{g}_{2,1}$.
Кроме того,

$$[e_2, e_3] = -e_3, \quad [e_1, e_4] = [e_2, e_4] = -e_4, \quad [e_3, e_4] = 0.$$

Субриманово расстояние между g_0, g_1:

$$d(g_0, g_1) = \inf \int\limits_0^T \sqrt{(dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)), dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)))}dt,$$

$g = g(t)$, $0 \le t \le T$, $dl_{g(t)^{-1}}(\dot g(t)) \in \mathfrak{p}$ и $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$; T не фиксировано.

Предложение 1.

Существует единственное с точностью до автоморфизма алгебры Ли $(2\mathfrak{g}_{2,1}, [\cdot,\cdot])$ двумерное подпространство $\mathfrak{p} \subset 2\mathfrak{g}_{2,1}$, порождающее алгебру $2\mathfrak{g}_{2,1}$ посредством $[\cdot,\cdot]$.

Пусть

$$e_1 = E_1 + E_2 + E_3, \quad e_2 = E_2 + E_4,$$
$$e_3 := [e_1, e_2] = E_1 + E_3, \quad e_4 := [e_1, e_3] = -E_1.$$

Двумерное подпространство $\mathfrak{p} = \mathrm{span}(e_1, e_2)$ порождает $2\mathfrak{g}_{2,1}$.
Кроме того,

$$[e_2, e_3] = -e_3, \quad [e_1, e_4] = [e_2, e_4] = -e_4, \quad [e_3, e_4] = 0.$$

Субриманово расстояние между g_0, g_1:

$$d(g_0, g_1) = \inf \int_0^T \sqrt{\left(dl_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)), dl_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t))\right)}dt,$$

$g = g(t)$, $0 \leq t \leq T$, $dl_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) \in \mathfrak{p}$ и $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$; T не фиксировано.

Теорема 1.

Каждая параметризованная длиной дуги кратчайшая $g = g(t)$, $0 \leq t \leq T = d(g_0, g_1)$, в субримановом пространстве (G, d) с $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$, есть решение задачи оптимального быстродействия (при заданных g_0 и g_1) для управляемой системы

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) \in U,$$

с измеримыми управлениями $u(t)$ и компактной областью управления

$$U = \{u \in \mathfrak{p} \,|\, (u, u) \leq 1\}.$$

Экстремали – параметризованные длиной дуги кривые в субримановом пространстве (G, d), удовлетворяющие ПМП.

Нестрого анормальные экстремали — экстремали, одновременно нормальные и анормальные относительно разных управляющих функций.

Теорема 1.

Каждая параметризованная длиной дуги кратчайшая $g = g(t)$, $0 \leq t \leq T = d(g_0, g_1)$, в субримановом пространстве (G, d) с $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$, есть решение задачи оптимального быстродействия (при заданных g_0 и g_1) для управляемой системы

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) \in U,$$

с измеримыми управлениями $u(t)$ и компактной областью управления

$$U = \{u \in \mathfrak{p} \,|\, (u, u) \leq 1\}.$$

Экстремали – параметризованные длиной дуги кривые в субримановом пространстве (G, d), удовлетворяющие ПМП.

Нестрого анормальные экстремали — экстремали, одновременно нормальные и анормальные относительно разных управляющих функций.

Предложение 2. (Liu W., Sussmann H., 1996)

В любом субримановом пространстве каждая нормальная экстремаль является геодезической, т.е. локально кратчайшей кривой.

Предложение 3. (Берестовский В.Н., Зубарева И.А., 2023)

Каждая анормальная экстремаль субриманова пространства $(G_{2,1} \times G_{2,1}, d)$ является одной из двух однопараметрических подгрупп

$$g(t) = \exp(ste_2), \ t \in \mathbb{R}, \quad s = \pm 1,$$

или ее левым сдвигом, и является нестрого анормальной.

$$g(t) = \begin{pmatrix} e^{-st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ s = \pm 1, \quad g(0) = e.$$

Предложение 2. (Liu W., Sussmann H., 1996)

В любом субримановом пространстве каждая нормальная экстремаль является геодезической, т.е. локально кратчайшей кривой.

Предложение 3. (Берестовский В.Н., Зубарева И.А., 2023)

Каждая анормальная экстремаль субриманова пространства $(G_{2,1} \times G_{2,1}, d)$ является одной из двух однопараметрических подгрупп

$$g(t) = \exp(ste_2),\ t \in \mathbb{R}, \quad s = \pm 1,$$

или ее левым сдвигом, и является нестрого анормальной.

$$g(t) = \begin{pmatrix} e^{-st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \pm 1, \quad g(0) = e.$$

Предложение 2. (Liu W., Sussmann H., 1996)

В любом субримановом пространстве каждая нормальная экстремаль является геодезической, т.е. локально кратчайшей кривой.

Предложение 3. (Берестовский В.Н., Зубарева И.А., 2023)

Каждая анормальная экстремаль субриманова пространства $(G_{2,1} \times G_{2,1}, d)$ является одной из двух однопараметрических подгрупп

$$g(t) = \exp(ste_2),\ t \in \mathbb{R}, \quad s = \pm 1,$$

или ее левым сдвигом, и является нестрого анормальной.

$$g(t) = \begin{pmatrix} e^{-st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ s = \pm 1, \quad g(0) = e.$$

Теорема 2. (Берестовский В.Н., Зубарева И.А., 2020)

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $(e_1,\dots,e_n)$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой, что $(e_1,\dots,e_r)$ — ортонормированный базис для скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на подпространстве $\mathfrak{p}$, порождающем алгебру Ли $\mathfrak{g}$; d — левоинвариантная субриманова метрика на G, определяемая парой $(\mathfrak{p},(\cdot,\cdot))$.
Каждая параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая субриманова пространства (G,d) с началом в единице является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)),\quad u(t)=\sum_{i=1}^{r}\psi_i(t)e_i,\ |u(0)|=1,$$

где абсолютно непрерывные функции $\psi_j(t)$, $j=1,\dots,4$, удовлетворяют системе ОДУ

$$\dot{\psi}_j(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}C_{ij}^k\psi_i(t)\psi_k(t).$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы в базисе $(e_1,\dots,e_n)$ алгебры Ли

В нашем случае

$$x' = \psi_1 + \psi_2, \quad y' = \psi_1 e^{-x}, \quad z' = \psi_2, \quad w' = \psi_1 e^{-z}, \qquad (1)$$

$$\psi_1' = -\psi_2\psi_3, \quad \psi_2' = \psi_1\psi_3, \quad \psi_3' = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3, \quad \psi_4' = -\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_4, \quad (2)$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = w(0) = 0; \quad \psi_i(0) = \varphi_i,\ i = 1, 2, 3, 4;\ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1. \quad (3)$$

Предложение 4.

Если $\varphi_4 \neq 0$, то

$$x(t) = -\ln\left(\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}\right), \quad y(t) = \frac{\psi_3(t) - \psi_1(t) - \varphi_3 + \varphi_1}{\varphi_4}.$$

Если $\varphi_3 + \varphi_4 \neq 0$, то

$$z(t) = -\ln\left(\frac{\psi_3(t) + \psi_4(t)}{\varphi_3 + \varphi_4}\right),$$

$$w(t) = \frac{\psi_2(t) + \psi_3(t) - \psi_1(t) - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_1}{\varphi_3 + \varphi_4}.$$

В нашем случае

$$x' = \psi_1 + \psi_2, \quad y' = \psi_1 e^{-x}, \quad z' = \psi_2, \quad w' = \psi_1 e^{-z}, \tag{1}$$

$$\psi_1' = -\psi_2\psi_3, \quad \psi_2' = \psi_1\psi_3, \quad \psi_3' = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3, \quad \psi_4' = -\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_4, \tag{2}$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = w(0) = 0; \quad \psi_i(0) = \varphi_i, \ i = 1,2,3,4; \ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1. \tag{3}$$

Предложение 4.

Если $\varphi_4 \neq 0$, то

$$x(t) = -\ln\left(\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}\right), \quad y(t) = \frac{\psi_3(t) - \psi_1(t) - \varphi_3 + \varphi_1}{\varphi_4}.$$

Если $\varphi_3 + \varphi_4 \neq 0$, то

$$z(t) = -\ln\left(\frac{\psi_3(t) + \psi_4(t)}{\varphi_3 + \varphi_4}\right),$$

$$w(t) = \frac{\psi_2(t) + \psi_3(t) - \psi_1(t) - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_1}{\varphi_3 + \varphi_4}.$$

Сачков Ю.Л. Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификация и задачи, интегрируемые в элементарных функциях // УМН, 2022. Т. 77, No. 1 (463). С. 109–176.

1) Субриманова задача на группе Гейзенберга (задача Дидоны);
2) Субримановы задачи на группе $SE(2)$ (машина Маркова–Дубинса, машина Ридса–Шеппа);
3) Осесимметричные субримановы задачи на группах $SU(2)$, $SO(3)$, $SO_0(2,1)$, $SL(2)$;
4) Задача о качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания;
5) Осесимметричные римановы задачи на группах $PSL(2,\mathbb{R})$ и $SL(2,\mathbb{R})$;
6) Осесимметричные римановы задачи на группах $SO(3)$ и $SU(2)$.

Сачков Ю.Л. Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях // УМН, 2023. Т. 78, No. 1 (469). С. 67–166.

1) Плоская субриманова задача Мартине;
2) Субриманова задача на группе $SE(2)$ евклидовых движений плоскости;
3) Субриманова задача на группе $SH(2)$ движений псевдоевклидовой плоскости;
4) Задача Эйлера об эластиках;
5) Левоинвариантная субриманова задача общего вида на $SO(3)$;
6) Субриманова задача на группе Энгеля;
7) Субриманова задача на группе Картана.

Из первых двух уравнений системы (2) и условия $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$:

$$\psi_1(t) = \cos\theta(t), \quad \psi_2(t) = \sin\theta(t).$$

Отсюда, из третьего и четвертого уравнения системы (2):

$$\theta''(t) = \psi_4(t)\cos\theta(t) - \theta'(t)\sin\theta(t), \quad \psi_4'(t) = -\psi_4(t)(\cos\theta(t) + \sin\theta(t)).$$

В итоге:

$$\cos\theta \cdot \theta''' + \sin\theta \cdot \theta'' \cdot \theta' + \cos\theta \cdot \big(\cos\theta + 2\sin\theta\big) \cdot \theta''$$

$$+\big(\theta'\big)^2 + \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \big(\cos\theta + \sin\theta\big) \cdot \theta' = 0.$$

Видно, что $\theta(t) = \mathrm{const}$ — частное решение этого уравнения.

Пусть $\theta'(t) = V(\theta)$. Тогда либо $V \equiv 0$, либо

$$V'' = -\frac{V'^2}{V} - \left(\mathrm{tg}\theta + \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{V}\right)V' - \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{V}. \quad (4)$$

$$V'' = P(\theta, V) + 3Q(\theta, V)V' + 3R(\theta, V)V'^2 + 3S(\theta, V)V'^3. \quad (5)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\theta, V), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\theta, V). \quad (6)$$

$$\tilde{V}'' = \tilde{P}(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + 3\tilde{Q}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}' + 3\tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^2 + 3\tilde{S}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^3. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) называются эквивалентными относительно точечной замены переменных (6).

Пусть $\theta'(t) = V(\theta)$. Тогда либо $V \equiv 0$, либо

$$V'' = -\frac{V'^2}{V} - \left(\mathrm{tg}\theta + \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{V}\right)V' - \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{V}. \quad (4)$$

$$V'' = P(\theta, V) + 3Q(\theta, V)V' + 3R(\theta, V)V'^2 + 3S(\theta, V)V'^3. \quad (5)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\theta, V), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\theta, V). \quad (6)$$

$$\tilde{V}'' = \tilde{P}(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + 3\tilde{Q}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}' + 3\tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^2 + 3\tilde{S}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^3. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) называются эквивалентными относительно точечной замены переменных (6).

Пусть $\theta'(t) = V(\theta)$. Тогда либо $V \equiv 0$, либо

$$V'' = -\frac{V'^2}{V} - \left(\mathrm{tg}\theta + \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{V}\right)V' - \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{V}. \quad (4)$$

$$V'' = P(\theta, V) + 3Q(\theta, V)V' + 3R(\theta, V)V'^2 + 3S(\theta, V)V'^3. \quad (5)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\theta, V), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\theta, V). \quad (6)$$

$$\tilde{V}'' = \tilde{P}(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + 3\tilde{Q}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}' + 3\tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^2 + 3\tilde{S}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^3. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) называются эквивалентными относительно точечной замены переменных (6).

Пусть $\theta'(t) = V(\theta)$. Тогда либо $V \equiv 0$, либо

$$V'' = -\frac{V'^2}{V} - \left(\mathrm{tg}\theta + \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{V}\right)V' - \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{V}. \quad (4)$$

$$V'' = P(\theta, V) + 3Q(\theta, V)V' + 3R(\theta, V)V'^2 + 3S(\theta, V)V'^3. \quad (5)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\theta, V), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\theta, V). \quad (6)$$

$$\tilde{V}'' = \tilde{P}(\tilde{\theta}, \tilde{V}) + 3\tilde{Q}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}' + 3\tilde{R}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^2 + 3\tilde{S}(\tilde{\theta}, \tilde{V})\tilde{V}'^3. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) называются эквивалентными относительно точечной замены переменных (6).

Dmitrieva V.V., Shapirov R.A. On the point transformations for the second order differential equations. I // https://arxiv.org/abs/solv-int/9703003

Обозначение: $Z_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} Z}{\partial\theta^i \partial V^j}$. Определим

$$A = P_{0,2} - 2Q_{1,1} + R_{2,0} + 2PS_{1,0} + SP_{1,0} - 3PR_{0,1} - 3RP_{0,1} - 3QR_{1,0} + 6QQ_{0,1},$$

$$B = S_{2,0} - 2R_{1,1} + Q_{0,2} - 2SP_{0,1} - PS_{0,1} + 3SQ_{1,0} + 3QS_{1,0} + 3RQ_{0,1} - 6RR_{1,0}.$$

Псевдоинвариант F веса 5, открытый Лиувиллем, имеет вид

$$3F^5 = AG + BH,$$

где

$$G = -BB_{1,0} - 3AB_{0,1} + 4BA_{0,1} + 3SA^2 - 6RBA + 3QB^2,$$

$$H = -AA_{0,1} - 3BA_{1,0} + 4AB_{1,0} - 3PB^2 + 6QAB - 3RA^2.$$

Предложение 5.

Псевдоинвариант $F = 0$ для уравнения (5) тогда и только тогда, когда $F = 0$ для уравнения (7).

Предложение 6.

Если $F = 0$ для уравнения (5), то это уравнение эквивалентно уравнению вида $V'' = f(\theta, V)$.

Предложение 7.

Псевдоинвариант $F \neq 0$ для уравнения (4).

Следствие.

Уравнение (4) не эквивалентно никакому уравнению Пенлеве.

Muriel C., Romero J.L. Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $A(t,x)\dot{x} + B(t,x)$ // Journal of Nonlinear Math. Physics, 2009. V. 16, No. 1. P. 209–222.

Предложение 8.

Уравнение (4) не имеет первый интеграл вида $A(\theta,V)V' + B(\theta,V)$.

Kruglikov B.S., Vollmer A., Lukes–Gerakopoulos G. On integrability of Certain Rank 2 Sub-Riemannian Structures // Regular and Chaotic Dynamics, 2017. V. 22, No. 5. P. 502–519.

Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб., 2018. Т. 209, No. 5. С. 74–119.

Muriel C., Romero J.L. Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $A(t,x)\dot{x} + B(t,x)$ // Journal of Nonlinear Math. Physics, 2009. V. 16, No. 1. P. 209–222.

Предложение 8.

Уравнение (4) не имеет первый интеграл вида $A(\theta, V)V' + B(\theta, V)$.

Kruglikov B.S., Vollmer A., Lukes–Gerakopoulos G. On integrability of Certain Rank 2 Sub-Riemannian Structures // Regular and Chaotic Dynamics, 2017. V. 22, No. 5. P. 502–519.

Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб., 2018. Т. 209, No. 5. С. 74–119.

Muriel C., Romero J.L. Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $A(t,x)\dot{x} + B(t,x)$ // Journal of Nonlinear Math. Physics, 2009. V. 16, No. 1. P. 209–222.

Предложение 8.

Уравнение (4) не имеет первый интеграл вида $A(\theta,V)V' + B(\theta,V)$.

Kruglikov B.S., Vollmer A., Lukes–Gerakopoulos G. On integrability of Certain Rank 2 Sub-Riemannian Structures // Regular and Chaotic Dynamics, 2017. V. 22, No. 5. P. 502–519.

Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб., 2018. Т. 209, No. 5. С. 74–119.

Козлов В.В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова // Матем. заметки, 1992. Т. 51, вып. 2. С. 46–52.

Определение 1.

Система из n дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

называется квазиоднородной с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$, если

$$v_i\left(\alpha^{g_1} x_1, \ldots, \alpha^{g_n} x_n\right) = \alpha^{g_i+1} v_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

при всех значениях $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и для всех $\alpha > 0$.

Другими словами, все уравнения системы (8) инвариантны относительно подстановки $x_i \to \alpha^{g_i} x_i$, $t \to t/\alpha$.

Козлов В.В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова // Матем. заметки, 1992. Т. 51, вып. 2. С. 46–52.

Определение 1.

Система из n дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

называется квазиоднородной с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$, если

$$v_i\left(\alpha^{g_1} x_1, \ldots, \alpha^{g_n} x_n\right) = \alpha^{g_i + 1} v_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

при всех значениях $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и для всех $\alpha > 0$.

Другими словами, все уравнения системы (8) инвариантны относительно подстановки $x_i \to \alpha^{g_i} x_i$, $t \to t/\alpha$.

Уравнения квазиоднородной системы (8) имеют частные решения следующего вида

$$x_1 = c_1 t^{-g_1}, \ \ldots, \ x_n = c_n t^{-g_n}.$$

При этом постоянные коэффициенты (в общем случае комплексные) c_i удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Определение 2.

Балансом квазиоднородной системы ОДУ (8) называется любое ненулевое решение системы (9).

Для каждого баланса c системы ОДУ (8) можно составить матрицу Ковалевской $K = (K_{ij})$, где

$$K_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(c) + \delta_{ij} g_i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение 3.

Собственные значения матрицы Ковалевской $K = K(c)$ называются показателями Ковалевской для данного баланса c.

Предложение 9.

Для всякого баланса c один из показателей Ковалевской всегда равен -1.

Для каждого баланса c системы ОДУ (8) можно составить матрицу Ковалевской $K = (K_{ij})$, где

$$K_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(c) + \delta_{ij} g_i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение 3.

Собственные значения матрицы Ковалевской $K = K(c)$ называются показателями Ковалевской для данного баланса c.

Предложение 9.

Для всякого баланса c один из показателей Ковалевской всегда равен -1.

В нашем случае алгебраическая система (9) запишется в виде:

$$-c_1 = -c_2 c_3, \quad -c_2 = c_1 c_3, \quad -c_3 = c_1 c_4 - c_2 c_3, \quad -c_4 = -c_1 c_4 - c_2 c_4.$$

Помимо нулевого решения, она имеет следующие ненулевые решения:

$$(i, 1, i, 0), \quad (-i, 1, -i, 0), \quad \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, i, -i\right), \quad \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, -i, i\right).$$

Матрица Ковалевской для системы (2) и баланса c:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -c_3 & -c_2 & 0 \\ c_3 & 1 & c_1 & 0 \\ c_4 & -c_3 & 1 - c_2 & c_1 \\ -c_4 & -c_4 & 0 & 1 - c_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае алгебраическая система (9) запишется в виде:

$$-c_1 = -c_2c_3, \quad -c_2 = c_1c_3, \quad -c_3 = c_1c_4 - c_2c_3, \quad -c_4 = -c_1c_4 - c_2c_4.$$

Помимо нулевого решения, она имеет следующие ненулевые решения:

$$(i, 1, i, 0), \quad (-i, 1, -i, 0), \quad \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, i, -i\right), \quad \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, -i, i\right).$$

Матрица Ковалевской для системы (2) и баланса c:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -c_3 & -c_2 & 0 \\ c_3 & 1 & c_1 & 0 \\ c_4 & -c_3 & 1-c_2 & c_1 \\ -c_4 & -c_4 & 0 & 1-c_1-c_2 \end{pmatrix}.$$

Показатели Ковалевской:

$$
\begin{array}{lll}
-1, 1, 2, -i & \text{для баланса} & (i, 1, i, 0); \\
-1, 1, 2, i & \text{для баланса} & (-i, 1, -i, 0); \\
-1, 1, 2, \frac{1+i}{2} & \text{для баланса} & \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, i, -i\right); \\
-1, 1, 2, \frac{1-i}{2} & \text{для баланса} & \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, -i, i\right).
\end{array}
$$

Замечание.

Функция $I_1 = \psi_1^2 + \psi_2^2$ является первым интегралом системы (2).

Определение 4.

Будем говорить, что система ОДУ (8) (с n уравнениями) полностью интегрируема, если она имеет $n-1$ функционально независимых первых интегралов.

Показатели Ковалевской:

$$\begin{array}{lll} -1, 1, 2, -i & \text{для баланса} & (i, 1, i, 0); \\ -1, 1, 2, i & \text{для баланса} & (-i, 1, -i, 0); \\ -1, 1, 2, \frac{1+i}{2} & \text{для баланса} & \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, i, -i\right); \\ -1, 1, 2, \frac{1-i}{2} & \text{для баланса} & \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, -i, i\right). \end{array}$$

Замечание.

Функция $I_1 = \psi_1^2 + \psi_2^2$ является первым интегралом системы (2).

Определение 4.

Будем говорить, что система ОДУ (8) (с n уравнениями) полностью интегрируема, если она имеет $n-1$ функционально независимых первых интегралов.

Huang K., Shi Sh., Li W. Kovaleskaya Exponents, Weak Painleve Property and Integrability for Quasi–homogeneous Differential Systems // Regular and Chaotic Dynamics, 2020. V. 25, No. 3. P. 295–312.

Теорема 3.

Предположим, что квазиоднородная система полностью интегрируема с мероморфными первыми интегралами. Тогда для любого баланса c справедливы следующие утверждения:

1) все показатели Ковалевской – рациональные числа;

2) жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho \neq -1$, имеет размер 1;

3) жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho = -1$, имеет размер 1 или 2.

Теорема 4.

Система ОДУ (2) не является полностью интегрируемой.

Huang K., Shi Sh., Li W. Kovaleskaya Exponents, Weak Painleve Property and Integrability for Quasi–homogeneous Differential Systems // Regular and Chaotic Dynamics, 2020. V. 25, No. 3. P. 295–312.

Теорема 3.

Предположим, что квазиоднородная система полностью интегрируема с мероморфными первыми интегралами. Тогда для любого баланса c справедливы следующие утверждения:

$1)$ все показатели Ковалевской – рациональные числа;

$2)$ жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho \neq -1$, имеет размер 1;

$3)$ жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho = -1$, имеет размер 1 или 2.

Теорема 4.

Система ОДУ (2) не является полностью интегрируемой.

Huang K., Shi Sh., Li W. Kovaleskaya Exponents, Weak Painleve Property and Integrability for Quasi–homogeneous Differential Systems // Regular and Chaotic Dynamics, 2020. V. 25, No. 3. P. 295–312.

Теорема 3.

Предположим, что квазиоднородная система полностью интегрируема с мероморфными первыми интегралами. Тогда для любого баланса c справедливы следующие утверждения:

$1)$ все показатели Ковалевской – рациональные числа;

$2)$ жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho \neq -1$, имеет размер 1;

$3)$ жорданов блок матрицы Ковалевской $K(c)$, соответствующий собственному значению $\rho = -1$, имеет размер 1 или 2.

Теорема 4.

Система ОДУ (2) не является полностью интегрируемой.

Качественное поведение субримановых геодезических на $G_{2,1} \times G_{2,1}$

В нашем случае

$$x' = \psi_1 + \psi_2, \quad y' = \psi_1 e^{-x}, \quad z' = \psi_2, \quad w' = \psi_1 e^{-z},$$

$$\psi_1' = -\psi_2\psi_3, \quad \psi_2' = \psi_1\psi_3, \quad \psi_3' = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3, \quad \psi_4' = -\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_4,$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = w(0) = 0; \quad \psi_i(0) = \varphi_i, \ i = 1, 2, 3, 4; \ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

$$x' = \cos\theta + \sin\theta, \quad z' = \sin\theta, \quad \theta' = (\varphi_3 + \varphi_4)e^{-z} - \varphi_4 e^{-x}, \tag{10}$$

где $x(0) = z(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.
Обозначим

$$v(t) = x(t) - z(t), \ t \in \mathbb{R}; \quad \alpha := \varphi_3 + \varphi_4, \ \beta := \varphi_4.$$

Система (10) запишется в виде

$$v' = \cos\theta, \quad z' = \sin\theta, \quad \theta' = \alpha e^{-z} - \beta e^{-v-z}, \tag{11}$$

где $v(0) = z(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.

В нашем случае

$$x' = \psi_1 + \psi_2, \quad y' = \psi_1 e^{-x}, \quad z' = \psi_2, \quad w' = \psi_1 e^{-z},$$

$$\psi_1' = -\psi_2\psi_3, \quad \psi_2' = \psi_1\psi_3, \quad \psi_3' = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3, \quad \psi_4' = -\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_4,$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = w(0) = 0; \quad \psi_i(0) = \varphi_i, \ i = 1, 2, 3, 4; \ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

$$x' = \cos\theta + \sin\theta, \quad z' = \sin\theta, \quad \theta' = (\varphi_3 + \varphi_4)e^{-z} - \varphi_4 e^{-x}, \qquad (10)$$

где $x(0) = z(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.
Обозначим

$$v(t) = x(t) - z(t), \ t \in \mathbb{R}; \quad \alpha := \varphi_3 + \varphi_4, \ \beta := \varphi_4.$$

Система (10) запишется в виде

$$v' = \cos\theta, \quad z' = \sin\theta, \quad \theta' = \alpha e^{-z} - \beta e^{-v-z}, \qquad (11)$$

где $v(0) = z(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$.

Система (11) задает натуральное уравнение плоской кривой $\gamma(t) = (v(t), z(t)) \subset \mathbb{R}^2$ с функцией кривизны

$$k(t) = e^{-z(t)}(\alpha - \beta e^{-v(t)}).$$

Определение 5.

Если кривая $\gamma(t)$ в $\mathbb{R}^2$ параметризована длиной дуги t с функцией кривизны $k(t)$, то величина $R(t_1, t_2) := \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t)dt$ называется ее поворотом (a turning angle) на отрезке $[t_1, t_2]$. Поворот кривой на области ее определения называется интегральной кривизной.

В нашем случае

$$R(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t)dt = \theta(t_2) - \theta(t_1).$$

На каждом интервале $I \subset \mathbb{R}$, где функция $\theta''(t) = k'(t)$ не меняет знак (где кривизна либо строго возрастает, либо строго убывает), кривая $\gamma(t)$ не имеет самопересечений. Поэтому наличие бесконечного числа таких самопересечений влечет наличие бесконечного числа интервалов с меняющей знак (осциллирующей) производной $\theta''(t)$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то

$$v(t) = \cos(\theta_0) \cdot t, \quad z(t) = \sin(\theta_0) \cdot t, \quad \theta(t) = \theta_0.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\beta = 0$, θ_0 — любое. Тогда

$$\theta'(t) = \cos\theta(t) + a,\ \theta(0) = \theta_0; \quad v(t) = \theta(t) + at - \theta_0; \quad a := \alpha - \cos\theta_0 > -1.$$

На каждом интервале $I \subset \mathbb{R}$, где функция $\theta''(t) = k'(t)$ не меняет знак (где кривизна либо строго возрастает, либо строго убывает), кривая $\gamma(t)$ не имеет самопересечений. Поэтому наличие бесконечного числа таких самопересечений влечет наличие бесконечного числа интервалов с меняющей знак (осциллирующей) производной $\theta''(t)$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то

$$v(t) = \cos(\theta_0) \cdot t, \quad z(t) = \sin(\theta_0) \cdot t, \quad \theta(t) = \theta_0.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\beta = 0$, θ_0 — любое. Тогда

$$\theta'(t) = \cos\theta(t) + a, \ \theta(0) = \theta_0; \quad v(t) = \theta(t) + at - \theta_0; \quad a := \alpha - \cos\theta_0 > -1.$$

На каждом интервале $I \subset \mathbb{R}$, где функция $\theta''(t) = k'(t)$ не меняет знак (где кривизна либо строго возрастает, либо строго убывает), кривая $\gamma(t)$ не имеет самопересечений. Поэтому наличие бесконечного числа таких самопересечений влечет наличие бесконечного числа интервалов с меняющей знак (осциллирующей) производной $\theta''(t)$.

Если $\alpha = \beta = 0$, то

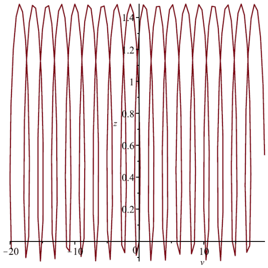
$$v(t) = \cos(\theta_0) \cdot t, \quad z(t) = \sin(\theta_0) \cdot t, \quad \theta(t) = \theta_0.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\beta = 0$, θ_0 — любое. Тогда

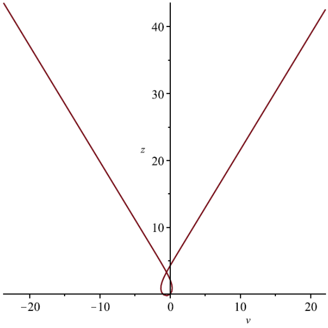
$$\theta'(t) = \cos\theta(t) + a,\ \theta(0) = \theta_0; \quad v(t) = \theta(t) + at - \theta_0; \quad a := \alpha - \cos\theta_0 > -1.$$

Пусть $a > 1$. Тогда функция $\theta(t)$ строго возрастает и принимает все вещественные значения. Угол поворота кривой $\gamma(t) = (v(t), z(t))$ бесконечен на лучах $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$. Можно доказать, что тогда кривая $\gamma(t)$ имеет бесконечное число самопересечений.

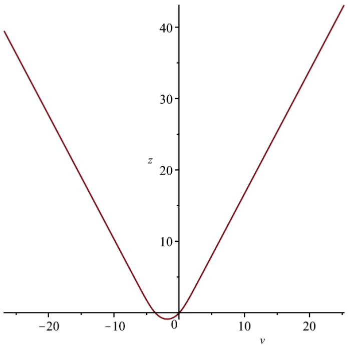
На рис. 1 изображен график кривой $\gamma(t)$ в случае $a = 3/2 > 1$, $\theta_0 = \pi/4$.



Пусть $-1 < a < 1$, $a \neq 0$. На рис. 2 изображен график кривой $\gamma(t)$ в случае $a = 1/2$, $\theta_0 = \pi/4$.



Пусть $-1 < a < 1$, $a \neq 0$. На рис. 3 изображен график кривой $\gamma(t)$ в случае $a = -1/2$, $\theta_0 = \pi/4$.

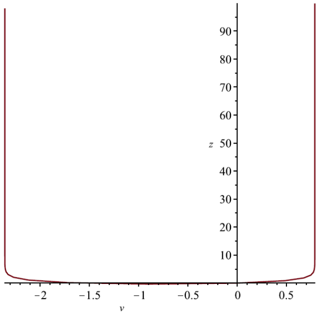


Пусть $a = 0$. Все точки кривой $\gamma(t)$ лежат на плоской кривой

$$\cos(v + \theta_0) \cdot e^{z(t)} = a.$$

Эта кривая не имеет самопересечений, является бесконечной и выпуклой, ее интегральная кривизна равна π.

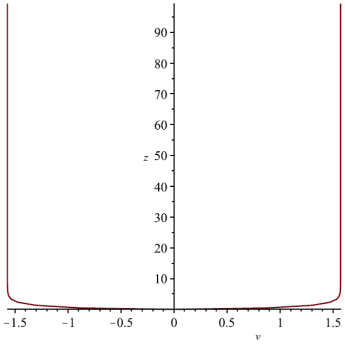
На рис. 4 изображен график кривой $\gamma(t)$ при $a = 0$, $\theta = \pi/4$.



Если $a = 0$, $\theta_0 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, все точки кривой $\gamma(t)$ лежат на плоской кривой

$$z = -\ln(\cos(v)), \quad v \in (2\pi n - \pi/2, 2\pi n + \pi/2).$$

На рис. 5 изображен график кривой $\gamma(t)$ при $a = 0$, $\theta_0 = 2\pi$.



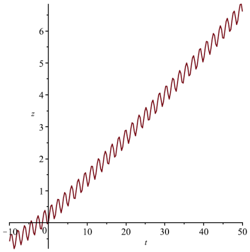
Предложение 10.

Пусть $(v(t), z(t), \theta(t))$ — произвольное решение системы ОДУ

$$v' = \cos\theta,\ \ z' = \sin\theta,\ \ \theta' = \alpha e^{-z} - \beta e^{-v-z};\quad v(0) = z(0) = 0,\ \ \theta(0) = \theta_0. \tag{12}$$

Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (соотв., $\alpha < 0$ и $\beta < 0$), то $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ (соотв., при $t \to -\infty$).

На рис. 6 изображен график функции $z(t)$ при $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\theta_0 = \pi/4$.



Теорема 4.

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\theta_0 = \theta(0) \in (0, \pi)$ таковы, что

$$\sin\theta_0 > -\Psi = \beta - \alpha + \alpha \cdot \ln\frac{\alpha}{\beta} \in [0, 1).$$

Тогда для решения системы уравнений (12) выполнено неравенство

$$e^{z(t)} \cdot \sin\theta(t) > \kappa := \sin\theta_0 + \Psi > 0$$

для всех $t > 0$. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1) $\theta(t) \in (0, \pi)$ для всех $t \in (0, \infty)$;

2) $z'(t) = \sin\theta(t) > 0$ для всех $t \in (0, \infty)$, следовательно, $z(t)$ строго возрастает на положительной полуоси;

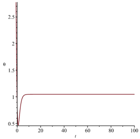
3) $z(t) \geq \ln(1 + \kappa t)$ для всех $t \in (0, \infty)$; в частности, $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$;

4) $\cos\theta(t) - \cos\theta_0 > -\alpha \cdot \left(1 - e^{-z(t)}\right)$ при $t \in (0, \infty)$;

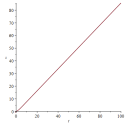
5) функция $t \to \ln\left(\mathrm{tg}\,\frac{\theta(t)}{2}\right) - \frac{\alpha}{\kappa} \cdot t$ строго убывает на $(0, \infty)$.

Легко проверить, что $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\theta_0 = \pi/4$ удовлетворяют условиям теоремы 4.

На рис. 7 изображен график функции $\theta(t)$.



На рис. 8 изображен график функции $v(t)$ (функции (t)).



Теорема 5.

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $-\Psi = \beta - \alpha + \alpha \cdot \ln \frac{\alpha}{\beta} \in [0, 1)$. Пусть решение системы уравнений (12) таково, что

$$\theta_0 \in (0, \pi), \quad \cos\theta_0 - \alpha > -1/\sqrt{2}, \quad \sin\theta_0 > -\Psi.$$

Тогда $x(t) = z(t) + v(t) \to \infty$ и $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, причем функция $z(t)$ строго возрастает при $t \in (0, \infty)$. Как следствие, $\theta'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 6.

Для любого решения систем ОДУ (1), (2) с начальными данными (3) справедливо равенство

$$\left(\varphi_1 - \varphi_3\varphi_4 y(t) + (\varphi_3 + \varphi_4)e^{-z(t)} - \varphi_4 e^{-x(t)}\right)^2$$

$$+ \left(\varphi_2 + (\varphi_3 + \varphi_4)w(t) - \varphi_4 y(t)\right)^2 = 1.$$

БОЛЬШОЕ СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!